

T.D. 5 : Dérivées partielles

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, des fonctions suivantes

$$f(x, y) = \tan(xy) + y, \quad f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2y}, \quad f(x, y) = e^{x+y} \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice 2. Pour chacune des équations suivantes, décrire l'ensemble des fonctions la satisfaisant.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 + x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + x.$$

Exercice 3. On pose

$$f(x, y) = xy^2 + \cos(xy), \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{e^x}{xy + y}.$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$, ainsi que $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$, avec $x = u + v$ et $y = uv$. De même, calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, ainsi que $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Exercice 4. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x - y.$$

On pourra effectuer le changement de variable

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= x + y \end{cases}.$$

Exercice 5. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = x$$

en passant en coordonnées polaires.

Exercice 6. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x} = x$$

à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} x &= r \operatorname{ch}(\theta) \\ y &= r \operatorname{sh}(\theta) \end{cases}.$$

Exercice 7. On s'intéresse à l'équation suivante, dite *équation des ondes* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Résoudre cette équation à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{cases}.$$

On se donne deux fonctions d'une variable, φ et ψ . Combien y a-t-il de solutions à l'équation des ondes vérifiant $f(x, 0) = \varphi(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$?