

T.D. 6 : Séries de Fourier

**Exercice 1.** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  paire et  $2\pi$ -périodique définie pour  $x$  dans  $[0, \pi]$  par  $f(x) = x$ . En écrivant  $f$  comme la somme de sa série de Fourier (justifier !), montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En utilisant la formule de Parseval, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Exercice 2.** Donner le développement en série de Fourier de la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin(x)).$$

**Exercice 3.** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  impaire et  $2\pi$ -périodique définie pour  $x$  dans  $[0, \pi]$  par  $f(x) = x(\pi - x)$ . En écrivant  $f$  comme la somme de sa série de Fourier (justifier !), déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad \text{et de} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

**Exercice 4.** Soit  $f$  une fonction dérivable. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f'$  en fonction de ceux de  $f$ .

De même, si  $f$  est dérivable  $k$  fois, calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f^{(k)}$ .

Comment peut-on donc “voir” la dérivabilité d’une fonction sur ses coefficients de Fourier ?

**Exercice 5.** Donner les séries de Fourier des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \sin^2(x) \cos(x), \quad h(x) = \cos^4(x).$$

**Exercice 6.** On définit le produit de convolution de deux fonctions  $2\pi$ -périodiques  $f$  et  $g$  par la formule

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Calculer les coefficients de Fourier de  $f * g$  en fonction de ceux de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 7.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  telle que  $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ . Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

**Exercice 8.** On étudie la propagation de la chaleur dans un anneau métallique. La température au temps  $t$  en un point de l’anneau est représentée comme une fonction  $T(t, \theta)$  dépendant de l’angle  $\theta$  fait entre le point considéré, le centre de l’anneau et un point de repère fixé sur l’anneau. A un instant  $t$  fixé, la fonction  $T(t, \cdot)$  est donc  $2\pi$ -périodique.

La propagation de chaleur est donnée par l’équation

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}(t, \theta),$$

et la température à l’instant initial  $t = 0$  est donnée par la fonction  $T_0(\theta)$ . Donner, pour tout temps  $t$ , la représentation en série de Fourier de  $T(t, \theta)$ , en fonction de celle de  $T_0$ . Que peut-on dire de l’évolution de la dérivabilité de la fonction  $T(t, \cdot)$  en fonction du temps ?