Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

T.D. 6 : Séries de Fourier
Correction de l'exercice 3

Exercice 3. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f impaire et 2π-périodique définie pour x dans $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. En écrivant f comme la somme de sa série de Fourier (justifier !), déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad \text{et de} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

Correction *Le graphe de f est donné dans la figure 1 ci-dessous. La fonction s'annule aux points de la*

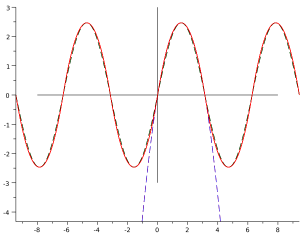

Figure 1: En rouge, le graphe de la fonction f. En pointillés noir, le graphe d'une sinusoïde. En pointillés bleu le graphe de la fonction $x \mapsto x(\pi - x)$

forme $k\pi$, avec k entier. Les valeurs maximales et minimales de la fonction sont $\pm\frac{\pi^2}{4}$.

Noter que f n'est pas une sinusoïde, même si l'on pourrait confondre à l'œil nu : sur la figure 1, le graphe d'une sinusoïde est donné en comparaison, en pointillés noirs.

Pour obtenir le graphe de f, on commence par le tracer sur l'intervalle $[0,\pi]$ où on a l'expression explicite $f(x) = x(\pi - x)$. Le graphe de la fonction $x \mapsto x(\pi - x)$, qui est une parabole, est symbolisé en pointillés bleus sur la figure 1. Ensuite, l'imparité donne le graphe sur $[-\pi, 0]$, ce qui permet d'obtenir le graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On remarquera que cette fonction est dérivable.

Pour calculer les coefficients de Fourier de f, on remarque tout d'abord qu'en raison de l'imparité de f son développement est constitué entièrement de sinus. Par conséquent, les coefficients a_n sont tous nuls. Les coefficients b_n sont donnés par

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Comme f et $x \mapsto \sin(nx)$ sont des fonctions impaires, le produit $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est une fonction impaire, ce qui nous donne par symétrie

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx. \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\, dx. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on va faire deux intégrations par parties successives, où l'on dérivera le *terme polynômial* $x(\pi - x)$ *et l'on primitivera le terme trigonométrique* $\sin(nx)$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)\,dx.\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{-\cos(nx)}{n}\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi (-2)\frac{\sin(nx)}{n^2}\,dx\right).\\
&= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\\
&= \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi\\
&= \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)\\
&= \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ pair,}\\ \frac{8}{\pi n^3} & \textit{sinon.}\end{cases}.
\end{aligned}$$

La fonction f *est continue et dérivable, on peut donc l'exprimer comme la somme de sa série de Fourier : pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$, *on a*

$$f(x) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} \frac{8}{\pi n^3}\sin(nx) = \sum_{k\geq 0}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x).$$

En prenant cette égalité au point $x = \frac{\pi}{2}$, *on obtient*

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k\geq 0}\frac{8(-1)^k}{\pi(2k+1)^3}.$$

On trouve donc

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

La formule de Parseval appliquée à f *s'écrit*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}}\frac{64}{\pi^2 n^6} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{64}{\pi^2(2k+1)^6}.$$

On a donc, en remarquant que $f(x) = x(\pi - x)$ *est impaire, et qu'en conséquence* $|f(x)|^2$ *est paire,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6} &= \frac{\pi}{64}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\
&= \frac{\pi}{32}\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx\\
&= \frac{\pi}{32}\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2\,dx\\
&= \frac{\pi}{32}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - \frac{\pi}{2}x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^\pi\\
&= \frac{\pi^6}{32}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{\pi^6}{960}.
\end{aligned}$$

Remarquons au passage qu'on peut en déduire

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6}+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}=\frac{64}{63\times 960}\pi^6=\frac{\pi^6}{945}.$$