

T.D. 8 : Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions de Cauchy données.

$$y' = 7y, \quad y(0) = 3,$$

$$y' = x^2y, \quad y(0) = 1,$$

$$y' = 3y - 2, \quad y(0) = -1,$$

$$y' = xy + x, \quad y(0) = -1, \text{ puis } y(0) = 1.$$

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy

$$xy' = 2y, \quad y(1) = 1.$$

A t-il une unique solution sur \mathbb{R} ? Pourquoi ? Donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$xy' = 2y.$$

Exercice 3. Le problème de Cauchy

$$xy' = y + x^2, \quad y(1) = 2$$

a t-il une unique solution sur \mathbb{R} ? Résoudre ce problème.

Exercice 4. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} - x^2y^4, \quad x > 0, \quad y(1) = 1.$$

On pourra chercher une équation satisfaite par la fonction $z = y^{-3}$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants

$$\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = -2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 3,$$

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 0,$$

$$\begin{cases} x' = -x + y - 2t + 1 \\ y' = x - y + 2t - 1 \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Exercice 6. Résoudre les équations

$$y' = e^{-x}y^3, \quad y(0) = 1/2, \text{ puis } y(0) = 1,$$

$$y' = \sqrt{|x|}y^2, \quad y(0) = 1.$$

Exercice 7. Résoudre les équations (une solution particulière pourra être cherchée sous la forme d'un polynôme)

$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1,$$

$$y'''' = y,$$

$$y'' - 4y' + 5y = x,$$

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Exercice 8. Résoudre l'équation

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$