Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

T.D. 8 : Équations différentielles - Corrigé

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions de Cauchy données.

$$y' = 7y, \quad y(0) = 3,$$

$$y' = x^2 y, \quad y(0) = 1,$$

$$y' = 3y - 2, \quad y(0) = -1,$$

$$y' = xy + x, \quad y(0) = -1, \text{ puis } y(0) = 1.$$

On trouve respectivement :

- $y(x) = 3e^{7x}$, *la solution sans condition initiale étant* $y(x) = \lambda e^{7x}$, *avec* λ *un réel,*
- $y(x) = e^{x^3/3}$, *la solution sans condition initiale étant* $y(x) = \lambda e^{x^3/3}$, *avec* λ *un réel,*
- $y(x) = \frac{1}{3}(2 - 5e^{3x})$, *puisque la solution générale de l'équation homogène* $y' = 3y$ *est donnée par* $y_h(x) = \lambda e^{3x}$, *où* λ *est un réel, et puisqu'une solution particulière de l'équation est par exemple* $y_p(x) = \frac{2}{3}$ *(si l'on cherche une solution constante).*
- $y(x) = -1$ *pour la condition initiale* $y(0) = -1$, *et* $y(x) = -1 + 2e^{x^2/2}$ *pour la condition* $y(0) = 1$, *la solution générale de l'équation homogène étant* $y_h(x) = \lambda e^{x^2/2}$, *avec* λ *un réel, et* $y_p(x) = -1$ *étant une solution particulière de l'équation (si l'on cherche par exemple une solution constante).*

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy

$$xy' = 2y, \quad y(1) = 1.$$

A t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ? Donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$xy' = 2y.$$

Ce problème n'a a priori pas une solution unique. En effet, l'équation peut se récrire $y' = \frac{2y}{x}$, *et la fonction donnant* y' *en fonction de* x *et* y *n'est pas régulière en* $x = 0$. *On a donc, sous la condition* $y(1) = 1$, *une unique solution sur* $]0, \infty[$, *en revanche on n'est pas assurés que cette solution se prolongera de manière unique à* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

La résolution donne $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$, *soit* $(\ln|y|)' = (2\ln|x|)'$, *égalité vraie, d'une part sur* $]0, \infty[$, *d'autre part sur* $] - \infty, 0[$. *En prenant la primitive respectivement sur* $]0, \infty[$ *et* $] - \infty, 0[$, *on peut donc écrire* $\ln|y| = 2\ln|x| + C_+$ *pour* $x > 0$ *et* $\ln|y| = 2\ln|x| + C_-$ *pour* $x < 0$ *(remarquer qu'il n'y a pas de raison d'affirmer* $C_+ = C_-$*), se qui se récrit* $y(x) = \lambda_+ x^2$ *pour* $x \geq 0$ *et* $y(x) = \lambda_- x^2$ *pour* $x \leq 0$, *les constantes* λ_+ *et* λ_- *pouvant être différentes. La condition* $y(1) = 1$ *impose* $\lambda_+ = 1$. *On a donc une inifinité de solutions (remarquer que ce sont bien des fonctions dérivables vérifiant l'équation):*

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ \lambda x^2 & si\ x < 0 \end{cases},$$

pour λ *un nombre réel.*

Exercice 3. Le problème de Cauchy

$$xy' = y + x^2, \quad y(1) = 2$$

a t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$? Résoudre ce problème.

L'équation peut se récrire $y' = \frac{y}{x} + x$, *et la fonction donnant* y' *en fonction de* x *et* y *n'est pas régulière en* $x = 0$. *On a donc sous la condition* $y(1) = 2$ *une unique solution sur* $]0, \infty[$ *sans toutefois être assurés que cette solution se prolongera de manière unique à* $\mathbb{R}$.

Passons à la résolution de l'équation. L'équation homogène s'écrit $xy' = y$. Ce qui se récrit $(\ln|y|)' = (\ln|x|)'$. On trouve donc

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ x & si\ x \geq 0 \\ \lambda_- x & si\ x \leq 0 \end{cases},$$

où λ_+ et λ_- sont deux nombres réels. On voit que cette fonction n'est dérivable que si $\lambda_+ = \lambda_-$. Par conséquent, les solutions de l'équation homogène sont les $y_h(x) = \lambda x$, avec λ un réel. Cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme, on voit que $y_p(x) = x^2$ est solution particulière.

Par consq́uent, les solution de l'équation $xy' = y + x^2$ sont les $y(x) = x^2 + \lambda x$, avec λ un réel. On voit que la condition $y(1) = 2$ impose $\lambda = 1$. En réalité, on voit que le système à une unique solution $y(x) = x^2 + x$.

Exercice 4. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} - x^2 y^4, \quad x > 0, \quad y(1) = 1.$$

On pourra chercher une équation satisfaite par la fonction $z = y^{-3}$.

Soit y une solution de l'équation et calculons la dérivée de la fonction $z = y^{-3}$. On trouve

$$z' = -3y'y^{-4} = -3\left(\frac{y}{x} - x^2y^4\right)y^{-4} = -3\left(\frac{y^{-3}}{x} - x^2\right) = -3\frac{z}{x} + 3x^2.$$

On est donc ramenés à la résolution d'une équation différentielle linéaire avec second membre. *L'équation homogène associée est $z' = -3\frac{z}{x}$, qui se récrit $(\ln|z|)' = -3(\ln x)'$ (remarquer que x est strictement positif par hypothèse), et donc les solutions de l'équation homogène sont $z_h(x) = \lambda x^{-3}$, avec λ un réel. En cherchant une solution particulière à $z' = -3\frac{z}{x} + 3x^2$ parmi les fonctions polynômes, on trouve la solution $z_p(x) = \frac{1}{2}x^3$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme*

$$z(x) = \lambda x^{-3} + \frac{1}{2}x^3.$$

Or, on avait posé $y^{-3} = z$, ce qui nous donne

$$y(x) = \left(\lambda x^{-3} + \frac{1}{2}x^3\right)^{-1/3}$$

(noter que la puissance -1/3 est bien définie puisque x est strictement positif). Remarquons enfin que la condition $y(1) = 1$ impose $\lambda = \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$y(x) = 2^{1/3}\left(x^{-3} + x^3\right)^{-1/3}.$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants

$$\begin{cases} x' = & x - 4y \\ y' = & -2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 3,$$

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 0,$$

$$\begin{cases} x' = -x + y - 2t + 1 \\ y' = x - y + 2t - 1 \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Le premier système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On peut diagonaliser la matrice obtenue pour avoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} .$$

En posant alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ ou de manière équivalente } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ce qui vérifie $u(0) = -1$ et $v(0) = 2$, l'équation matricielle se récrit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

soit encore $u' = 3u$, avec $u(0) = -1$ et $v' = -3v$, avec $v(0) = 2$. Les solutions sont clairement $u(t) = -e^{3t}$ et $v(t) = 2e^{-3t}$. En faisant le changement de variables inverse, on trouve

$$\begin{cases} x(t) = & -2e^{3t} + 2e^{-3t} \\ y(t) = & e^{3t} - 2e^{-3t} \end{cases} .$$

Le deuxième système peut être récrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

La forme diagonalisée de la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i & 0 \\ 0 & 1+3i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}} .$$

De même que précédemment, on fait le changement de variables

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

on trouve $u = \frac{1}{2}e^{(1-3i)t}$ et $v = \frac{1}{2}e^{(1+3i)t}$ soit encore

$$\begin{cases} x & = e^t \cos(3t) \\ y & = e^t \sin(3t) \end{cases} .$$

Enfin, le troisème système comporte un second membre. On va donc d'abord chercher une solution particulière, puis on cherchera la solution générale de l'équation homogène. Si l'on cherche une solution où x et y seraient des polynômes de degré 1, on trouverais $x(t) = 1 - t$ et $y(t) = t - 1$.

Cherchons maintenant les solutions de l'équation homogène

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases} , \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

En diagonalisant la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on voit que $(x+y)' = 0$ et que $(x-y)' = -2(x-y)$. On trouve donc

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t + a + be^{-2t} \\ y(t) = -1 + t + a - be^{-2t} \end{cases} .$$

Les conditions initiales imposent alors $a = 3/2$ et $b = -3/2$.

Exercice 6. Résoudre les équations

$$y' = e^{-x}y^3, \quad y(0) = 1/2, \text{ puis } y(0) = 1,$$

$$y' = \sqrt{|x|}y^2, \quad y(0) = 1.$$

Exercice 7. Résoudre les équations (une solution particulière pourra être cherchée sous la forme d'un polynôme)

$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1,$$

$$y'''' = y,$$

$$y'' - 4y' + 5y = x,$$

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Pour la première équation, on trouve comme solution particulière de l'équation $y_p(x) = x^2 - x$ *(on cherche les solutions sous la forme* $ax^2 + bx + c$*, ce qui donne des équations simples sur* a*,* b *et* c*). Cherchons la solution générale de l'équation homogène* $y''+y'+y = 0$*. Il faut pour cela résoudre l'équation polynomiale* $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ *on trouve comme solutions* $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ *et* $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$*. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme* $y_h(x) = ae^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + be^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$ *ce qui peut se récrire sous la forme* $y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{a}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \tilde{b}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$*. Finalement, les solutions de l'équation sont les*

$$y = x^2 - x + e^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{a}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \tilde{b}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Pour résoudre $y'''' = y$*, il faut chercher les solutions de l'équation polynômiale* $\lambda^4 - 1$*, qui sont* 1*,* -1*,* i *et* $-i$*. On trouve alors que les solutions de l'équation différentielles sont les* $ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}$*, ce qui peut aussi s'écrire* $ae^x + be^{-x} + \tilde{c}\cos(x) + \tilde{d}\sin(x)$*.*

Commençons la résolution de $y'' - 4y' + 5y = x$ *par la recherche d'une solution polynomiale. Si l'on cherche une solution sous la forme* $y_p(x) = ax + b$*, on trouve* $y_p(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$*. Résolvons maintenant l'équation homogène* $y'' - 4y' + 5y = 0$*. On cherche les solution de l'équation* $\lambda^2 - 4\lambda + 5$*. On trouve* $2 - i$ *et* $2 + i$*. Les solutions de l'équation homogène sont donc* $y_h(x) = ae^{(2-i)x} + be^{(2+i)x}$ *ou encore* $y_h(x) = e^{2x}(\tilde{a}e\cos(x) + \tilde{b}\sin(x))$*. Les solutions sont donc*

$$y(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{25} + e^{2x}(\tilde{a}e\cos(x) + \tilde{b}\sin(x)).$$

Tout d'abord, observons que $y_p(x) = x + 2$ *est solution de l'équation* $y'' - 2y' + y = x$*. La résolution de l'équation homogène* $y'' - 2y' + y = 0$ *passe par la résolution de l'équation* $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$*. On peut récrire cette équation comme* $(\lambda - 1)^2 = 0$*. On voit que* $\lambda = 1$ *est une racine double. Par conséquent, les solutions de l'équation homogène s'écrivent* $y_h(x) = \lambda e^x + \mu xe^x$*. Les solutions sont donc*

$$y(x) = x + 2 + \lambda e^x + \mu xe^x.$$

Exercice 8. Résoudre l'équation

$$y' = \sqrt{y}, y(0) = 0.$$

Le fait d'écrire $\sqrt{y}$ *impose que* y *soit une fonction positive, et comme* $y' = \sqrt{y}$*, c'est une fonction positive croissante. Comme* $y(0) = 0$*, on déduit donc que* $y(x) = 0$ *si* $x \leq 0$*. On a alors deux possibilités : soit* y *est identiquement nulle, ce qui fournit bien une solution, soit elle est strictement positive à partir d'un certain point* $x_0 \geq 0$*. Supposons que l'on soit dans ce deuxième cas. On a* $y(x) = 0$ *si* x *est dans* $]-\infty, x_0]$*, et* $y(x) \neq 0$ *si* x *est dans* $]x_0, \infty[$*. L'équation se récrit donc sur* $]x_0, \infty[$ *comme* $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$*, soit encore* $2(\sqrt{y})' = 1$*. On a donc* $y = (\frac{x}{2} + C)^2$*. Cette fonction s'annulle en* $-2C$*, on a donc* $x_0 = -2C$*. Les solutions sont donc les fonctions*

$$y(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq x_0 \\ \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^2 & si\ x > x_0 \end{cases},$$

où x_0 *est un certain réel positif.*