Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

T.D. 9 : Décomposition en éléments simples, transformation de Laplace

Exercice 1. Donner dans chaque cas le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

$$A(X) = X^4 - 3X + 2, \quad B(X) = X^2 + X - 1,$$

$$A(X) = X^4 + 1, \quad B(X) = X^2 - 1.$$

On trouve

$$X^4 - 3X + 2 = (X^2 - X + 2)(X^2 + X - 1) - 6X + 4$$

et

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 1) + 2$$

Exercice 2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^3 + X^2 - 1}{X^2 - 1}, \quad \frac{X^3}{X^2 + 1}, \quad \frac{X^5}{X^4 - 1}, \quad \frac{X^6}{X^4 - 2X^3 + X^2}$$

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)}, \quad \frac{X^5 + X^3 + 1}{X^4 + 2X^2 + 1}.$$

On trouve

$$\frac{X^3 + X^2 - 1}{X^2 - 1} = X + 1 + \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/2}{X-1},$$

$$\frac{X^3}{X^2 + 1} = X - \frac{1/2}{X-i} - \frac{1/2}{X+i} = X - \frac{X}{X^2+1},$$

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = X + \frac{1/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{1/4}{X+i} + \frac{1/4}{X-i} = X + \frac{1/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{X/2}{X^2+1},$$

$$\frac{X^6}{X^4 - 2X^3 + X^2} = \frac{X^4}{X^2 - 2X + 1} = X^2 + 2X + 3 + \frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2},$$

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X-b}\right),$$

$$\frac{X^5 + X^3 + 1}{X^4 + 2X^2 + 1} = X + \frac{-1/2 + i/4}{X+i} - \frac{1/4}{(X+i)^2} + \frac{-1/2 + i/4}{X-i} - \frac{1/4}{(X-i)^2} = X - \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

Exercice 3. Donner une primitive de chacune des fractions rationnelles suivantes

$$\frac{1}{ax^2 + b}, \quad \frac{1}{ax + b}, \quad \frac{x}{ax^2 + b},$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 1}, \quad \frac{x^5}{x^3 - x}, \quad \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

Pour $\frac{1}{ax^2+b}$, on a plusieurs possibilités, suivant les valeurs de a et b. On peut supposer $a \neq 0$ (sinon la question n'est pas très intéressante...)

- *Si $b = 0$, on cherche donc une primitive de $\frac{1}{ax^2}$, qui est bien sûr $-\frac{1}{ax}$.*

- *Si $ab > 0$, le changement de variable $z = \sqrt{\frac{a}{b}}y$ donne*

$$\int_0^x \frac{dy}{ay^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}x} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)$$

- *Si $ab < 0$, le changement de variable $z = \sqrt{-\frac{a}{b}}y$ donne*

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dy}{ay^2+b} =& \frac{1}{\sqrt{-ab}} \int_0^{\sqrt{-\frac{a}{b}}x} \frac{dz}{1-z^2} \\ =& \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \int_0^{\sqrt{-\frac{a}{b}}x} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz \\ =& \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \left(-\ln\left(1-\sqrt{-\frac{a}{b}}x\right) + \ln\left(1+\sqrt{-\frac{a}{b}}x\right)\right)\end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{ax+b}$, une primitive est bien sûr $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$ (on suppose toujours $a \neq 0$).

Pour $\frac{x}{ax^2+b}$, on a une expression de la forme $\frac{u'}{2au}$, une primitive est donc $\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|$.

Pour les autres fractions, il faut tout d'abord décomposer la fraction en éléments simples, puis primitiver chacun des termes (les trois premiers exemples montrent que c'est toujours possible).

Exercice 4. Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 1$$

avec les conditions initiales $y'(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

La solution y de l'équation vérifie

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + y) = \mathcal{L}1$$

ce qui se récrit

$$\underbrace{p^2\mathcal{L}y - py(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}y''} + 2\underbrace{(p\mathcal{L}y - y(0))}_{\mathcal{L}y'} + \mathcal{L}y = \frac{1}{p},$$

d'où

$$(p^2 + 2p + 1)\mathcal{L}y + (p+1) = \frac{1}{p},$$

On trouve donc $\mathcal{L}y(p) = \frac{1-p-p^2}{p(p^2+2p+1)} = \frac{1-p-p^2}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$. En passant à la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(x) = 1 - 2e^{-x} - xe^{-x}.$$

Exercice 5. Résoudre

$$y'''' - y = 0$$

sous la condition $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

En passant par la transformée de Laplace, l'équation se récrit

$$\underbrace{p^4\mathcal{L}y - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0)}_{=\mathcal{L}y''''} - \mathcal{L}y = 0,$$

c'est-à-dire

$$p^4\mathcal{L}y - p^3 - \mathcal{L}y = 0.$$

On doit donc résoudre

$$\mathcal{L}y(p) = \frac{p^3}{p^4-1}.$$

En décomposant le terme de droite en éléments simples, on trouve

$$\mathcal{L}y(p) = \frac{1/4}{p-1} + \frac{1/4}{p+1} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}.$$

En passant finalement à la transformée de Laplace inverse, on trouve

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - 1 - 4t \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 - 2 - 5t \end{cases},$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = 8$.

En passant à la transformée de Laplace, on trouve le système

$$\begin{cases} p\mathcal{L}y_1 - y_1(0) = 4\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2 - \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2} \\ p\mathcal{L}y_2 - y_2(0) = 5\mathcal{L}y_1 - 2\mathcal{L}y_2 - \frac{2}{p} - \frac{5}{p^2} \end{cases},$$

qui se récrit

$$\begin{cases} (p-4)\mathcal{L}y_1 + \mathcal{L}y_2 = 1 - \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2} \\ -5\mathcal{L}y_1 + (p+2)\mathcal{L}y_2 = 8 - \frac{2}{p} - \frac{5}{p^2} \end{cases}.$$

En résolvant, on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_1 = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{3p} + \frac{7}{4(p+1)} - \frac{17}{12(p-3)} \\ \mathcal{L}y_2 = \frac{2}{3p} + \frac{35}{4(p+1)} - \frac{17}{12(p-3)} \end{cases},$$

et on conclue

$$y_1 = t + \frac{2}{3} + \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{17}{12}e^{3t}, \text{ et } y_2 = \frac{2}{3} + \frac{35}{4}e^{-t} - \frac{17}{12}e^{3t}.$$