Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

Correction de la 5$^{\text{ème}}$ interrogation

1. Donner le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les vecteurs propres et la forme diagonalisée de la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$
Le polynôme caractéristique est le déterminant
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix},$$
qui vaut, comme on peut le voir en développant selon la première ligne
$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1-\lambda)\left((4-\lambda)(-2-\lambda) - (-4)\times 2\right) \\ &= (-1-\lambda)(-8-2\lambda+\lambda^2+8) \\ &= (-1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2) \\ &= (-1-\lambda)\lambda(-2+\lambda). \end{aligned}$$
Les valeurs propres, qui sont les racines de P sont donc 0, -1 *et* 2.
On cherche les vecteurs propres en résolvant les systèmes
$$\begin{cases} -x &= 0 \\ -5x+4y+2z &= 0 \\ 4x-4y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x &= -x \\ -5x+4y+2z &= -y \\ 4x-4y-2z &= -z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -x &= 2x \\ -5x+4y+2z &= 2y \\ 4x-4y-2z &= 2z \end{cases}.$$
On trouve respectivement (c'est un exemple, tout multiple de ces vecteurs coniendrait aussi)
$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
On a trois valeurs propres distinctes, la matrice est donc diagonalisable, et on obtient la décomposition
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(la première matrice a pour colonnes les vecteurs propres, la deuxième a pour éléments diagonaux les vecteurs propres, et la troisième est l'inverse de la première, à calculer).

2. (a) Résoudre l'équation différentielle
$$y' = -2y, \; y(0) = -1.$$
L'équation sans condition initiale a pour solution $y(x) = \lambda e^{-2x}$. On veut $y(0) = -1$, or $y(0) = \lambda$, donc $\lambda = -1$. On a donc
$$y(x) = -e^{-2x}.$$
(b) Résoudre l'équation différentielle
$$y' = -xy + x^2 + 1, \; y(0) = 3.$$
On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y = ax + b$.
Pour que $y(x) = ax+b$ satisfasse l'équation, il faut que a et b soient solution de
$$a = -x(ax+b) + x^2 + 1.$$
Il doivent donc vérifier $a = 1$ et $b = 0$. La solution particulière est donc $y(x) = x$.
Cherchons la solution générale de l'équation homogène $y' = -xy$. On a $\frac{y'}{y} = -x$ donc $(\ln|y|)' = -\left(\frac{x^2}{2}\right)'$, d'où $\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$. En passant à l'exponentielle, on trouve donc $y = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
La solution de l'équation sans condition initiale est donc $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + x$. La condition $y(0) = 3$ impose $\lambda = 3$. La solution est donc
$$y(x) = 3e^{-\frac{x^2}{2}} + x.$$