Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

Interrogation 1 : Corrigé type

Énoncé : *Donner,* ***avec toutes les justifications nécessaires****, l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x\dfrac{x^2-1}{x-3}}$.*

Corrigé : La fonction $f(x)$ est définie pour les réels x tels que $x\frac{x^2-1}{x-3}$ et défini et est positif ou nul (car la fonction racine est définie sur $[0, \infty[$). Pour trouver l'ensemble de définition et le signe de $x\frac{x^2-1}{x-3}$, on dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		∞
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\frac{x^2-1}{x-3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On voit que la quantité $x\frac{x^2-1}{x-3}$ est définie si et seulement x est différent de 3 et est positive ou nulle si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup]3, \infty[$. Par conséquent, l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup]3, \infty[.$$

Interrogation 3 : Corrigé type

Énoncé : *Dans le changement de variables polaire, donner les formules permettant d'obtenir (x, y) en fonction de (r, θ) et réciproquement, en précisant clairement les domaines de définition, à l'arrivée et au départ.*

Corrigé : Le changement de variables polaire est donné par

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \end{cases}.$$

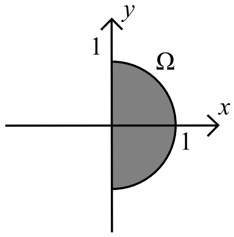
L'application $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ réalise une bijection entre les ensembles $]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\}\times]-\infty, 0])$. Son application réciproque est donnée par[1]

$$\begin{cases} r = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = & 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}.$$

Énoncé : *On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, x^2 + y^2 < 1\}$. Dessiner le domaine Ω et calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_\Omega e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$.*

Corrigé : Le domaine Ω est l'intersection des deux domaines $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. Le domaine Ω_1 est le demi-plan droit, délimité par la droite d'équation $x = 0$, et le domaine Ω_2 est l'intérieur du disque centré au point $(0, 0)$ et de rayon 1. Le domaine Ω est représenté sur la figure suivante :

[1] L'écriture $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ n'est valable que dans le cas $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On n'a alors qu'une bijection entre $]0, \infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $]0, \infty[\times\mathbb{R}$.



Pour calculer l'intégrale demandée, on va faire un changement de variables polaire[2]. L'élément différentiel s'écrit $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, le domaine Ω est envoyé sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < r < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} =]0,1[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

et la fonction à intégrer devient e^{r^2}. La formule de changement de variable nous donne alors

$$\iint_\Omega e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta r e^{r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r e^{r^2}\mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 \pi = \frac{(e-1)\pi}{2}.$$

Énoncé : *Calculer l'intégrale* $\int_0^\pi \sin^3(x)\,dx$.

Corrigé : Plusieurs méthodes sont possibles[3].

- *Par intégration par partie.* On écrit la fonction $\sin^3(x)$ sous la forme $\sin(x) \times \sin^2(x)$. On fait une intégration par parties en dérivant $\sin^2(x)$ et en primitivant $\sin(x)$. La formule d'intégration par parties donne

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\sin^2(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(x)\cos(x)(-\cos(x))\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x.$$

  On peut donc écrire, en utilisant la relation $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$,

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \sin(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = 4 - 2\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x.$$

  On a donc

$$3\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = 4,$$

  ce qui donne

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

- *En linéarisant la fonction.*

  On utilise des formules de trigonométrie pour écrire la fonction $\sin^3$ comme une somme de fonctions sinus et cosinus. Deux approches sont possibles[4].

  – *En passant par les exponentielles complexes.* On écrit

$$\begin{aligned}\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 &= \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

[2] Ce changement de variables est tout à fait naturel au vu de la forme du domaine d'intégration (un demi-disque), et de la forme de la fonction (qui ne dépend que de la quantité x^2+y^2).

[3] On n'en demandait bien sûr qu'une seule !

[4] De même une seule des deux suffit.

– *En utilisant des formules trigonométriques.* On sait que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. On a donc $\sin^3(x) = \frac{\sin(x)-\cos(2x)\sin(2x)}{2}$. Il suffit ensuite d'utiliser la formule $\cos(2x)\sin(x) = \frac{\sin(3x)-\sin(x)}{2}$ pour trouver $\sin^3(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$.

On otient donc la linéarisation $\sin^3(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(3x)\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_0^x \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\Big[\sin(3x)\Big]_0^\pi x + \frac{3}{4}\Big[\sin(x)\Big]_0^x \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

- *Une transformation astucieuse.*
  Comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi (1-\cos^2(x))\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi \cos^2(x)\mathrm{d}x\sin(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dans les deux intégrales obtenues, la fonction à intégrer admet une primitive explicite.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi - \Big[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\Big]_0^\pi \\ &= 1-(-1) - \frac{1}{3}(1-(-1)) \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$