Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

Outils mathématiques : Partiel
Durée : 2 heures

Les notes de cours et de travaux dirigés, ainsi que la calculatrice sont ***interdits****. On accordera le* ***plus grand soin*** *à la rédaction.*
Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.
Le barème portera sur plus de 20 points. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de traiter les 5 questions pour avoir la note maximale.

1. Questions de cours

1. Donner la formule d'intégration par parties.
2. Donner la formule de changement de variables dans le cas des intégrales simples.
3. Donner la formule de changement de variables dans le cas des intégrales doubles.
4. Dans le changement de variables polaire, donner les formules permettant d'obtenir (x, y) en fonction de (r, θ) et réciproquement, en précisant clairement les domaines de définition, à l'arrivée et au départ.

2. Exercice

Dans cet exercice, on se propose de calculer les *intégrales de Wallis* I_n, définies pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que
$$I_{n+2} = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x.$$
2. Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{I_{n+2}}{n+1}.$$
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. Calculer I_0 et I_1. En déduire l'expression générale de I_n (on pourra discuter selon la parité de n).

3. Exercice

Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0\}.$$

Dessiner Ω, puis calculer l'intégrale

$$\iint_\Omega \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

4. Exercice

On définit le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ 1 < x + y < 3,\ 0 < xy < 1\}.$$

On va calculer l'intégrale

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & xy \end{cases}.$$

1. Montrer que le domaine Ω s'envoie bijectivement sur le domaine Δ défini par

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 1 < u < 3,\ 0 < v < 1\}.$$

   Pour cela, on montrera que le changement de variables inverse est donné par

$$\begin{cases} x = & \frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2} \\ y = & \frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2} \end{cases}.$$

2. Dessiner les domaines Ω et Δ.
3. Montrer que les éléments différentiels $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ vérifient la relation $(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$
4. Montrer par un changement de variables que l'on a l'égalité

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\Delta ue^v\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

5. Donner la valeur de

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. Exercice

On cherche à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'un changement de variables de la forme $y = ax+b$, montrer la relation

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\mathrm{d}x = 2I + \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

3. En déduire que

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$