Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

Outils mathématiques : Partiel
Corrigé

1. Questions de cours

Se rapporter aux notes de cours.

2. Exercice

Dans cet exercice, on se propose de calculer les *intégrales de Wallis* I_n, définies pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que

$$I_{n+2} = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

On utilise la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. *On écrit alors* $\sin^{n+2}(x) = \sin^n(x) - \cos^2(x)\sin^n(x)$, *et il suffit de prendre l'intégrale.*

2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{I_{n+2}}{n+1}.$$

On fait une intégration par partie en dérivant $\cos(x)$ *et primitivant* $\cos(x)\sin^n(x)$, *qui se primitive en* $\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}$.

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

La relation de la question 1 se récrit $I_{n+2} = I_n - \frac{I_{n+2}}{n+1}$. *On obtient le résultat en regroupant les termes en* I_{n+2}.

4. Calculer I_0 et I_1. En déduire l'expression générale de I_n (on pourra discuter selon la parité de n).
Les intégrales I_0 *et* I_1 *se calculent explicitement. On trouve* $I_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $I_1 = 1$. *On a donc*

$$I_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

si n *est pair et*

$$I_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{2}{3}$$

si n *est impair.*

3. Exercice

Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0\}.$$

Dessiner Ω, puis calculer l'intégrale

$$\iint_\Omega \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Le domaine Ω *est délimité par les cercles d'équations* $x^2 + y^2 = 1$ *et* $x^2 + y^2 = 2$, *qui sont des cercles centrés en* $(0,0)$ *de rayons respectifs 1 et* $\sqrt{2}$, *et par la droite d'équation* $x = 0$, *qui n'est autre que l'axe*

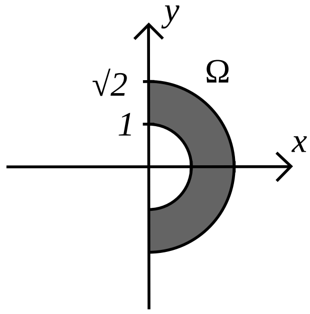

Figure 1: Le domaine Ω.

des ordonnées. Le domaine Ω est représenté sur la Figure 1. On fait un changement de variables polaire. Le domaine Ω a pour image en polaire le domaine $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < r < \sqrt{2},\ \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$. La fonction $\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 \frac{1}{x^2+y^2}$ se récrit $\frac{\theta^2}{r^2}$. La formule de changement de variables donne donc

$$\iint_\Omega \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dr}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\, d\theta = \frac{\pi^3 \ln 2}{24}.$$

4. Exercice

On définit le domaine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ 1 < x+y < 3,\ 0 < xy < 1\}.$$

On va calculer l'intégrale

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & xy \end{cases}.$$

1. Montrer que le domaine Ω s'envoie bijectivement sur le domaine Δ défini par

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 1 < u < 3,\ 0 < v < 1\}.$$

Pour cela, on montrera que le changement de variables inverse est donné par

$$\begin{cases} x = & \frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2} \\ y = & \frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2} \end{cases}.$$

On voit que la quantité u^2-4v se récrit dans les coordonnées (x,y) comme $u^2-4v = (x+y)^2-4xy = x^2+2xy+y^2-4xy = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$. Sur Ω, on a $x < y$, donc $y-x$ et positif et on a $\sqrt{u^2-4v} = y-x$. On trouve alors bien les expressions données pour x et y.

Pour trouver l'image Δ de Ω, il suffit de remplacer $x+y$ par u et xy par v, les quantités $\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}$ et $\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}$ vérifiant automatiquement la condition

$$\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2} < \frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}.$$

2. Dessiner les domaines Ω et Δ.
Le domaine Ω est délimité par les droites d'équations $x+y=1$, $x+y=3$, $x=0$ et $y=0$, ainsi que par l'hyperbole d'équation $xy=2$. Le domaine Δ est simplement le rectangle $[1,3]\times[0,1]$. Les domaines Ω et Δ sont représentés sur la figure 2.

3. Montrer que les éléments différentiels $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ vérifient la relation $(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$
La matrice Jacobienne s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

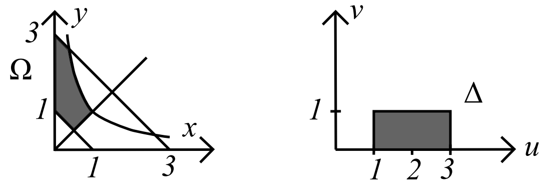

Figure 2: Les domaines Ω et Δ.

Son déterminant vaut donc $x-y$ dont la valeur absolue est $y-x$, puisque $x<y$ sur Ω, soit encore $x-y<0$.

4. Montrer par un changement de variables que l'on a l'égalité

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\Delta ue^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

On peut écrire $e^{xy}(x^2-y^2)dx\,dy = -\Big(e^{xy}(x+y)\Big)\Big((y-x)dx\,dy\Big)$. Il suffit ensuite d'appliquer la formule de changement de variables.

5. Donner la valeur de

$$\iint_\Omega e^{xy}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On peut récrire

$$-\iint_\Delta ue^v\,du\,dv = -\int_1^3 u\,du\int_0^1 e^v\,dv = -\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)(e-1) = 4(1-e).$$

5. Exercice

On cherche à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'un changement de variables de la forme $y = ax+b$, montrer la relation

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\mathrm{d}x.$$

Il suffit d'appliquer le changement de variables $y = \frac{\pi}{2}-x$, puisque $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$. On trouve que les deux intégrales sont égales.

2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\mathrm{d}x = 2I + \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Il suffit d'utiliser la formule $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, puis la relation $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ pour obtenir. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\,dx = I + I + \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

3. En déduire que

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Les changements de variables successifs $y = 2x$ puis $y = \frac{\pi}{2}+x$ montrent que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\frac{dx}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\frac{dx}{2} = \frac{I}{2}+\frac{I}{2} = I$. La relation de la question 2 se récrit alors $2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$, d'où le résultat.