

Test de connaissances

1. Avez vous déjà rencontré les notions suivantes ?

Matrices	Oui - Non
Déterminant	Oui - Non
Diagonalisation des matrices	Oui - Non
Équations différentielles	Oui - Non
Dérivées partielles	Oui - Non
Transformée de Laplace	Oui - Non

2. Dériver les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (1 + x^2)^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{\cos(x)}.$$

Réponse : $f'(x) = 6x(1 + x^2)^2$, et $g'(x) = -\sin(x)/\sqrt{\cos(x)}$.

3. Calculer les deux intégrales ci-dessous :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)e^{\sin(x)} dx = e - 1 \quad \int_1^2 x \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 3/4.$$

4. Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y des fonctions définies par :

$$f(x, y) = \cos(x + y^2) \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{1 + x}{1 + y}.$$

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x + y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = -2y \sin(x + y^2)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} g(x, y) = -\frac{1+x}{(1+y)^2}$.

5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y_1' = 3y_1, \text{ avec } y_1(0) = 1, \quad \text{et} \quad y_2' = xy_2, \text{ avec } y_2(0) = 1.$$

Réponse : $y_1(x) = e^{3x}$, et $y_2(x) = e^{x^2/2}$.

6. Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

8. Quelles sont les valeurs propres de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} ?$$

Réponse : Le polynôme caractéristique est $(-2 - X)((-5 - X)(4 - X) - (-3) \times 6) = (-2 - X)(X^2 + X - 2) = -(X + 2)(X - 1)(X + 2)$. Les valeurs propres sont donc 1, -2 et -2.