Université Pierre et Marie Curie 2011-2012
ME1 - Analyse

Interro 1 - 29 Septembre 2011

Question de cours : Rappeler la propriété des intervalles fermés emboîtés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On veut démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(a) < 0 < f(b).$$

(1) Construisez une suite d'intervalles emboîtés réels $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

et dont la longueur tend vers zéro ($\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$).
Indication : discuter suivant le signe de $f(\frac{a_n+b_n}{2})$.

(2) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, tel que $f(c) = 0$.

Exercice 2. Soient $0 < a_0 < a_1$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{a_0 + 2a_1}{3}$.
Indication : poser $b_n = a_n - a_{n-1}$. On pourra aussi exprimer a_n en fonction des $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(a_1,a_2)\in A^2} |a_2 - a_1| = \sup A - \inf A.$$