Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Devoir n°2
Durée : 1 heure

Dans tout le problème, (u_n) désigne une suite de réels *non nuls*. On dit que le produit infini $\prod u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)$ converge, quand N tend vers l'infini, vers *un nombre fini non nul*. On notera alors sa limite

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} u_n = \prod_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)$ n'admet pas de limite finie, *ou si elle converge vers* 0, on dira que le produit $\prod u_n$ diverge.

Par ailleurs, on rappelle le développement limité de la fonction logarithme népérien au voisinage du point 1 :

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\left((x-1)^2\right).$$

1. Montrer que pour que le produit infini $\prod u_n$ converge, il est nécessaire que la suite (u_n) tende vers 1.
2. Soit (u_n) une suite de réels non nuls convergeant vers 1.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que les produits infinis $\prod u_n$ et $\prod u_{n_0+n}$ sont de même nature.
3. (a) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln u_n$ converge.
   (b) On suppose $u_n \geq 1$. Montrer que la convergence de $\prod u_n$ est équivalente à celle de $\sum(u_n - 1)$.
   (c) Montrer que si $u_n \leq 1$, la convergence de $\prod u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum(u_n - 1)$.
4. On suppose dans cette question que la série $\sum(u_n - 1)$ converge. Montrer que le produit $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum(u_n - 1)^2$ converge.
5. (a) Montrer, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
   (b) Si q est un entier supérieur ou égal à 2, que vaut $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n}$?
   (c) On note (p_n) la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$...). Montrer l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n} \leq \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}.$$

   (d) En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.