Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Corrigé du devoir n°2

1. On remarque que u_N est donné par $\frac{\prod_{n=0}^{N} u_n}{\prod_{n=0}^{N-1} u_n}$. Si le produit $\prod u_n$ converge vers une limite l, on obtient que (u_N) converge vers $\frac{l}{l} = 1$.

2. (a) On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite convergente : pour n supérieur à n_0, on a $|u_n - 1| < 1$, ce qui entraîne $u_n > 0$.

   (b) On peut écrire, pour $N \geq n_0$,
$$\prod_{n=0}^{N} u_n = \left(\prod_{n=0}^{n_0-1} u_n\right)\left(\prod_{n=n_0}^{N} u_n\right) = \left(\prod_{n=0}^{n_0-1} u_n\right)\left(\prod_{n=0}^{N-n_0} u_{n_0+n}\right).$$
   On conclut en remarquant que $\prod_{n=0}^{n_0-1} u_n$ est un réel non nul fixé (il ne dépend pas de N).

3. (a) Comme la fonction ln est une bijection continue de réciproque continue entre $]0, \infty[$ et $\mathbb{R}$, la suite $\prod_{n=0}^{N} u_n$ converge vers une limite non nulle (c'est à dire strictement positive puisque $u_n > 0$) si et seulement si $\ln\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right)$ a une limite finie. Or $\ln\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \ln(u_n)$.

   (b) Si (u_n) ne tend pas vers 1, ni le produit ni la série ne peuvent converger. On suppose donc que (u_n) tend vers 1. On a $\ln(y) = (y-1) + o(y-1)$, au voisinage de $y = 1$. On a donc $\ln(u_n) \sim (u_n - 1)$. Comme ces deux suites sont positives (on a supposé $u_n \geq 1$), la série $\sum \ln(u_n)$ converge si et seulement si $\sum (u_n - 1)$ converge.

   (c) On suppose comme en 3b que la suite (u_n) tend vers 1. On remarque ensuite que la suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang (voir question 2a) et que la convergence du produit ne dépend que de la fin de la suite (question 2b). Ensuite le raisonnement est le même qu'en 3b en remarquant que les deux suites $(\ln(u_n))$ et $(u_n - 1)$ sont à termes négatifs.

4. On suppose comme en 3b que (u_n) tend vers 1. Le développement limité du logarithme montre que $\ln(u_n) - (u_n - 1) \sim -\frac{(u_n-1)^2}{2}$. Comme $\sum (u_n - 1)$ converge, la série $\sum \ln(u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum (\ln(u_n) - (u_n - 1))$ converge. Or $\ln(u_n) - (u_n - 1)$ est négatif (par le développement limité, ou par convexité) et équivalent à $-\frac{(u_n-1)^2}{2}$ qui est négatif. Par conséquent, la convergence de $\sum (\ln(u_n) - (u_n - 1))$ est équivalente à celle de $\sum (u_n - 1)^2$.

5. (a) Grâce à la question 3b, la convergence de la série $\sum \frac{1}{n}$ est équivalente à la convergence de $\prod \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = N + 1$, qui diverge.

   (b) C'est une série géométrique, on trouve donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}$.

   (c) On a
$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \prod_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum_{k_1, \ldots, k_N \geq 0} \frac{1}{p_1^{k_1} \ldots p_N^{k_N}} = \sum_{\substack{\{\text{entiers } n \text{ dont les} \\ \text{facteurs premiers sont} \\ p_1, \ldots, p_N\}}} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n}$$
   (puisque les entiers inférieurs à p_N ont leurs facteurs premiers parmi p_1, ..., p_N).

   (d) Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge et (p_n) tend vers l'infini, la suite $\left(\sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n}\right)$ tend vers l'infini. Donc $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ aussi, donc $\prod \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ diverge (ses produits partiels tendent vers 0). Par la question 3c la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.