Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Devoir n°3
Durée : 1 heure

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique (c'est-à-dire que $f(t+2\pi) = f(t)$ pour tout réel t).

1. Justifier que l'intégrale
$$\int_T^{T+2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$
est bien définie et que sa valeur ne dépend pas du réel T.

2. On définit la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule
$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$
Montrer l'égalité
$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\left((n+1/2)\,t\right)}{\sin\left(t/2\right)}.$$

3. Montrer que φ_n est 2π-périodique et que
$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(t)\mathrm{d}t = 2\pi.$$

4. On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par
$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$
Montrer que
$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t)\varphi_n(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

5. Soit x un réel. Montrer que la fonction F_x définie par
$$F_x(t) = \begin{cases} (-1)^k 2f'(x) & \text{si } t = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{f(x)-f(x-t)}{\sin(t/2)} & \text{sinon} \end{cases}$$
est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. Montrer que pour une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, la suite (u_n) définie par
$$u_n = \int_0^{2\pi} g(t)\sin((n+1/2)t)\mathrm{d}t$$
tend vers 0. *On admettra que ce résultat reste vrai si g est supposée non plus $\mathcal{C}^1$ mais seulement continue.*

7. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = f(x).$$