Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Corrigé du devoir n°3

1. La fonction f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, elle est notamment continue et son intégrale sur tout segment (ici $[T, T+2\pi]$) est bien définie. Notons $\Phi(T) = \int_T^{T+2\pi} f(t)\mathrm{d}t$. On a

$$\Phi(T) = F(T+2\pi) - F(T),$$

où F est une primitive de f. La fonction Φ est donc dérivable et

$$\Phi'(T) = f(T+2\pi) - f(T) = 0.$$

Par conséquent, Φ est constante. On peut également procéder par changement de variables : il existe dans l'intervalle $[T, T+2\pi[$ un unique réel de la forme $2k\pi$ avec k entier (on prend pour k la partie entière de $T/2\pi$). On écrit alors

$$\int_T^{T+2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_T^{2k\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2k\pi}^{T+2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{T-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(s)\mathrm{d}s + \int_0^{T-2(k-1)\pi} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t,$$

où l'on a fait les changements de variables $s = t - 2(k-1)\pi$ et $u = t - 2k\pi$. Le membre de droite ne dépend alors plus de T.

2. La fonction φ_n est définie par la somme partielle d'une suite géométrique (de raison e^{it}). On a donc

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-it/2}(e^{-int} - e^{i(n+1)t})}{e^{-it/2}(1 - e^{it})} = \frac{e^{-i(n+1/2)t} - e^{i(n+1/2)t})}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

3. On a $e^{ik(t+2\pi)} = e^{ixt}(e^{i2\pi})^k = e^{ikx}$. La fonction φ_n est donc une somme de fonctions 2π-périodique et est 2π-périodique elle-même. Pour calculer $\int_0^{2\pi} \varphi_n(t)\mathrm{d}t$, il suffit de connaître les valeurs de $\int_0^{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t$. Or $\int_0^{2\pi} e^{it\times 0}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$, et pour $k \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{ik}\left(e^{i2k\pi} - 1\right) = \frac{1}{ik}\left(1^k - 1\right) = 0.$$

4. Tout d'abord, on trouve

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t\right) e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\varphi_n(x-t)\mathrm{d}t,$$

et le changement de variables $s = x - t$ permet de conclure, en utilisant la question 1.

5. Par composition, la fonction F_x est continue en tout les points où $\sin(t/2) \neq 0$, c'est-à-dire sauf aux points de la forme $t = 2k\pi$, avec k un entier. En ces points, on trouve (pour $h \to 0$)

$$F_x(2k\pi+h) = \frac{f(x) - f(x - 2k\pi - h)}{\sin(k\pi + h/2)} = \frac{f(x) - f(x-h)}{(-1)^k \sin(h/2)} = \frac{f'(x)h + o(h)}{(-1)^k(h/2 + o(h))} = \frac{f'(x) + o(1)}{(-1)^k(1/2 + o(1))}.$$

Par conséquent, F_x a pour limite $(-1)^k 2f'(x)$ aux points de la forme $t = 2k\pi$. F_x est donc continue.

6. On intègre par parties, ce qui donne

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \left|\int_0^{2\pi} g(t)\sin((n+1/2)t)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\left[g(t)\frac{-\cos((n+1/2)t)}{n+1/2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g'(t)\frac{-\cos((n+1/2)t)}{n+1/2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1/2}\left(|g(0)|+|g(2\pi)|+\left|\int_0^{2\pi} g'(t)\cos((n+1/2)t)\mathrm{d}t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{n+1/2}\left(|g(0)|+|g(2\pi)|+\int_0^{2\pi}|g'(t)|\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

La suite (u_n) tend donc bien vers 0.

7. Les question 3 et 4 montrent que

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_x(t)\sin((n+1/2)t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par la question 5, F_x est continue, et la question 6 montre que le membre de droite tend vers 0.