Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2011 - 2012

Exercices : Intégration

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^a \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \frac{\sin(x)\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{3x^5+5x^4+2x^3+1}{x^6+2x^5+x^4+2x+3}\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^1 (2x+3x^2)\sqrt{1+x^2+x^3}\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^a \ln(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^a \arcsin(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a x^2\arctan(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}},$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}+2}, \quad \int_0^a (x^2+1)e^{2x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a (x^2+1)\cos x\mathrm{d}x, \quad \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.
Donner un équivalent des expressions suivantes lorsque n tend vers ∞ ($\alpha > -1$)

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}, \quad \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

Exercice 3.
Calculer, pour $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$\int_0^\pi \ln(1-2\cos(x)\alpha+\alpha^2)\mathrm{d}x$$

(on pourra utiliser des sommes de Riemann et considérer la factorisation de $X^{2n}-1$ en produits de polynômes réels irréductibles).

Exercice 4.
Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 5.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$$

Et si f est seulement continue (on se rappellera que l'on peut approcher une fonction continue par des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, en un sens à préciser) ?

Exercice 6.
On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x.$$
2. En déduire un développement de
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$
(on pourra commencer par regarder $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$).

Exercice 7.
Soient f une fonction 2π-périodique continue et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique.

1. On définit le produit de convolution de f par φ par la formule
$$f * \varphi(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) f(t) \mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction $f * \varphi$ est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f * \varphi = \varphi * f$.

2. On suppose que φ est positive, que $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\mathrm{d}t = 1$, et on choisit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si que $\varphi(t) = 0$ si $t \in [\eta, 2\pi - \eta]$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$
$$|f(x) - f * \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 8.
Pour chacune des intégrales suivantes, dire si l'intégrale est convergente, et la calculer le cas échéant.
$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^\infty 2\arctan(x) - \pi \mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(x)},$$
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \ln(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}.$$

Exercice 9.

1. On considère la suite (I_n) définie par la formule
$$\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$$
(on appelle les I_n *intégrales de Wallis*).
   (a) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   (b) En déduire un expression générale pour I_n.
   (c) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$. En déduire que
   $$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
   (on pourra considérer la suite $(I_n I_{n+1})$).

2. On considère la suite (J_n) définie par
$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$.
   (b) Montrer que J_n converge vers $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.
   (c) À l'aide d'un changement de variable, donner une relation entre I_n et J_n.
   (d) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss
   $$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 10.
On considère la fonction
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$, et que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$, même).
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour n entier ?