Université Pierre et Marie Curie — 2011-2012
ME1 - Analyse — Feuille d'exercices 1

Nombres réels

Inégalités

Exercice 1. **a)** Soit a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \text{ et } \sqrt{ab}\leq \frac{1}{2}(a+b).$$

b) Soit $n\geq 1$ un entier et $a_1,a_2,\ldots,a_n$ n réels positifs. Montrer que

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

c) Soit a,b et c trois réels positifs. Montrer que

$$(b+c)(a+c)(a+b)\geq 8abc.$$

Exercice 2. Soit $a_1,a_2,\ldots,a_n\in[0,1]$. Montrer que

$$1-\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\leq 1-\prod_{k=1}^{n}a_k$$

Borne supérieure, inférieure, adhérence

Exercice 3. Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Monter que

a) $A\cup B$ est majoré et $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$.

b) $A+B$ est majoré et $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

c) Si $A\subset B$ alors $\sup A\leq\sup B$.

Donnez les énoncés correspondants au cas A et B deux parties non vides minorés de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On pose

$$G_+=G\cap]0,+\infty[\text{ et } a=\inf G_+.$$

a) Montrer que si $a>0$, on a $G=a\mathbb{Z}=\{an\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

b) Montrer que si $a=0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Soit θ un nombre réel, et soit $G_\theta=\{n\theta+2k\pi\mid n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que G_θ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que G_θ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{\theta}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.

d) Montrer que si $\frac{\theta}{\pi}\notin\mathbb{Q}$, l'ensemble $\{\cos n\theta \mid n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans l'intervalle $]-1,1[$.

e) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles la suite $(\cos n\theta)$ est convergente.

Exercice 5. Soit (x_n) une suite des nombres réels telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{1}$$

Montrer que pour toute suite (y_n) tendant vers $+\infty$, l'ensemble

$$A = \{x_n - x_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. Donner deux exemples de suites vérifiant (1).

Partie entière

Soit E la fonction "partie entière", on rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exercice 6. Montrer que si x est réel et n est entier positif, on a

a) $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$,

b) $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$,

c) $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité

$$E(x^3) = E(x).$$

Exercice 8. Soit (x_n) une suite des nombres réels telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Montrer que l'ensemble $\{x_n - E(x_n) \mid n \geq 0\}$ est dense dans l'intervalle $[0, 1]$.

Points d'accumulation

Exercice 9. Determiner l'ensemble de points d'accumulation et l'adhérence de l'ensemble

$$E = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Rationnels et réels

Exercice 10. Soit (p_n) et (q_n) deux suites d'entiers positifs. Montrer que si la suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ admet une limite irrationnelle quand $n \to +\infty$, alors les deux suites (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.