Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Exercices : Séries

Exercice 1.
Donner la nature des séries suivantes, et calculer la somme des éventuelles séries convergentes.

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \ ; \ \sum e^{-n} \ ; \ \sum \log(1+1/n) \ ;$$

$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!} \ ; \ \sum 3^n \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{n+1}}\right) \ ; \ \sum \frac{1}{\log n} \ ;$$

$$\sum \frac{1}{n} \ ; \ \sum \frac{\cos n}{2^n} \ ; \ \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}.$$

Exercice 2.
Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^a$ converge pour tout $a \geq 1$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum u_n^a$ diverge pour tout $a < 1$.
3. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Exercice 3.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ converge. On notera $0, a_1a_2a_3\dots$ sa limite. Combien vaut $0.999\dots$?

Exercice 4.
Soit $\sum u_n$ une série divergente dont le terme général est positif. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{\sum_{k=0}^n u_k}$ diverge.

Exercice 5.
Soit u_n une suite décroissante de nombres réels positifs.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_n nu_n = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum n(u_{n+1}-u_n)$ converge. Comparer les sommes de ces deux séries.
3. Comparer les natures des séries

$$\sum u_n \ ; \ \sum n u_{n^2} \text{ et } \sum 2^n u_{2^n}.$$

Exercice 6.
Donner la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \ ; \ \sum \frac{n!}{n^n} \ ; \ \sum \frac{a^n}{1+b^n} \ ; \ \sum \frac{n^{n\log n}}{(\log n)^n}$$

$$\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \ ; \ \sum \frac{n}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)} \ ; \ \sum \frac{1}{n}\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 7.
Étudier la série $\sum u_n$ définie par $u_{2n} = \frac{1}{2^n}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}$.

Exercice 8.
Donner un équivalent à $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$? Comparer la suite $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ à la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$. Conclusion ?