Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1$^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Exercices : Séries (2)

Exercice 1.
Donner la nature des séries données par

$$\sum \alpha^n n^\beta (\ln n)^\gamma,\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ réels},$$

en fonction de α, β et γ.
Et pour

$$\sum \alpha^n n^\beta (\ln n)^\gamma (\ln(\ln n))^\delta \ ?$$

Exercice 2.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$?

Exercice 3.
Montrer l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq e \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!N}.$$

En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 4.
Donner un équivalent à la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$, pour t tendant vers 1.

Exercice 5.
Que peut on dire du produit de Cauchy de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle même ? On rappelle que le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Exercice 6.
On considère la suite $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.
2. En déduire que u_n converge et qu'il existe une constante C telle que

$$u_n \sim C e^{-n} n^n \sqrt{n}.$$

Exercice 7.
Montrer la formule

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{p+n-1}^{n} z^n,$$

où z est un complexe vérifiant $|z| < 1$.