Université Pierre et Marie Curie — 2011-2012

ME1 - Analyse — Feuille d'exercices 2

Suites

Généralités

Exercice 1. Étudier les suites de terme général

a) $u_n = \left(2\sin\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cos n\right)^n$

b) $v_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

c) $w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 2. Soit x un nombre réel et soit E la fonction partie entière. Étudier les suites de terme général

$$\textbf{a) } u_n = \frac{E(nx)}{n} \qquad \textbf{b) } v_n = \frac{E(x) + E(2x) + ... + E(nx)}{n^2}.$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer que

(1) Si la suite (u_n) est à valeurs entières et converge, elle est stationnaire.

(2) Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, elle est minorée et atteint sa borne inférieure.

(3) Si la suite (u_n) est alternée et converge, sa limite est nulle.

(4) Si la suite (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$ et si, pour tout n, $u_n \neq l$, l'ensemble des valeurs de (u_n) est infini.

Exercice 4. Soit θ un réel non multiple entier de π. On pose, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = \sin n\theta \quad \text{et} \quad v_n = \cos n\theta.$$

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite (v_n) converge. En déduire que ces deux suites sont divergentes.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite réelle bornée. On suppose qu'il existe deux réels non nuls a et b tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ et que les suites (e^{iau_n}) et (e^{ibu_n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Indication : On pourra montrer que la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels positifs ou nuls vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

(1) Montrer que la suite $m_n = \max\{u_n, u_{n+1}\}$ est convergente, soit l sa limite.

(2) Soit $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|m_n - l| < \epsilon$. Montrer que $\forall n \geq N$, $u_n > l - 4\epsilon$.

(3) En déduire que la suite (u_n) est convergente de limite l.

Moyenne de Cesàro

Exercice 7. Soit (a_n) une suite de réels positifs vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$ et soit (u_n) une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

converge aussi vers l. En déduire la limite des suites de termes général

$$\textbf{a)}\ x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \textbf{b)}\ y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Suites adjacentes

Exercice 8. Montrer que les suites $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 9. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$, où (a_k) est une suite réelle décroissante de limite 0.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) Si l est leur limite commune, montrer que $|S_n - l| \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Moyenne arithmético-géométrique. Soit a et b deux nombres réels vérifiant $0 < b \leq a$. On leur associe les suites définies par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad \text{avec} \quad a_0 = a \text{ et } b_0 = b.$$

a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

b) Montrer que $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{8b}$.

c) Montrer qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - b_n| \leq 8b\gamma^{2^{n-n_0+1}}$. Quel est l'intérêt de cette majoration ?

Suites de Cauchy

Exercice 11. Soit (u_n) une suite complexe vérifiant $(\exists k \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - u_n| < k^n)$. Montrer que cette suite est de Cauchy.

Exercice 12. Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k k!}$ est de Cauchy et que sa limite est irrationnelle. S'en inspirer pour montrer que le nombre de Neper e est irrationnel.

Suites récurrentes

Exercice 13. Étudier les suites récurrentes définies par

(1) $u_{n+1} = \sin(\sqrt{u_n})$, avec $u_0 \in [0, 1]$.

(2) $u_{n+1} = au_n + b$, où u_0, a et b sont réels. (Récurrence linéaire.)

Exercice 14. Soit a un réel positif et f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[-a, a]$, vérifiant

$$(\forall x \neq 0,\ |f(x)| < |x|). \tag{1}$$

On construit la suite définie par $u_0 \in [-a, a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge en commençant par montrer la convergence de la suite $(|u_n|)$.
Donner l'exemple d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et ne possédant pas de point fixe.

Exercice 15. Montrer que la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$$

converge et calculer sa limite.

Indication : On pourra l'encadrer par deux suites récurrentes linéaires.

Valeurs d'adhérence

Exercice 16. Soit (u_n) une suite réelle telles que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. On suppose que la suite (u_n) possède deux valeurs d'adhérence a et b telles que $a < b$. Montrer que tout élément de l'intervalle $[a, b]$ est alors valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Extraits du CAPES 96-97

Exercice 17. Soit α un réel positif. On considère les suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha},$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{1}{\alpha n^\alpha}.$$

a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x^{-\alpha}$, montrer que

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note $l(\alpha)$ leur limite commune.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq \frac{1}{\alpha}$. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$0 \leq l(\alpha) - \frac{1}{\alpha}.$$

d) 1. En admettant que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(\alpha) = l(\alpha) - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2^{\alpha+1}} - \frac{1}{3^{\alpha+1}}$ est croissante, ce qui sera démontrer dans un exercice ultérieur sur les séries, montrer que la fonction $h(\alpha) = l(\alpha) - \frac{1}{\alpha}$ admet une limite lorsque $\alpha \to 0$. On note γ cette limite.

2. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n). \tag{2}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right). \tag{3}$$