Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012

TD 6 : Trigonométrie

Exercice 1.
Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$$\cos(2x)\sin(3x), \quad \cos(4x), \quad \sin(5x).$$

Exercice 2.
Exprimer les fonctions suivantes à partir de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(y)$ et $\cos(y)$.

$$\cos(2x-y)\sin(x+y), \quad \cos(3x+y)\sin^2(x-y).$$

Exercice 3.
Linéariser les expressions suivantes :

$$\cos^4(x), \quad \sin^3(x), \quad \cos(x)^3\sin^2(x).$$

Exercice 4.
Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x)$:

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+1}, \quad \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^4(x)}, \quad \cos^4(x)-\cos(x)\sin^3(x).$$

Exercice 5.
Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x/2)$:

$$\frac{1}{\cos(x)+\tan(x)}, \quad \frac{1+\cos^3(x)}{\cos^2(x)}, \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}.$$

Exercice 6.
Calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer un changement de variables trigonométrique : $u=\sin(x)$, $u=\cos(x)$, $u=\tan(x)$, ou $u=\tan(x/2)$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

Exercice 7.
Simplifiez la somme

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Exercice 8.
Montrer l'égalité

$$2^n\prod_{k=0}^{n-1}\cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{\sin(x)}.$$

Exercice 9.
Montrer que

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n) = 2^n\cos(a_1)\cos(a_2)\ldots\cos(a_n),$$

où $\sum\cos(\pm a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n)$ désigne la somme sur tout les choix de signes possibles.