Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Devoir maison : corrigé de l'exercice 1

1. Soit ε un réel strictement positif. Comme la suite (a_n) est supposée tendre vers 0, il existe un entier naturel p tel que pour tout entier n avec $n \geq p$, on ait
$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
On a alors, pour n supérieur à p,
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} |a_k| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k\right| + \frac{n-p}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k\right| + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$
puisque $\frac{n-p}{n} \leq 1$.
Le réel p étant fixé, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Par conséquent, on peut trouver un réel p' tel que pour $n \geq p'$, on ait
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Par conséquent, pour tout entier n supérieur à $\max(p, p')$, on a
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
On a donc bien prouvé que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ tend vers 0, autrement dit que la suite (a_n) tend en moyenne vers 0.

2. (a) Comme (b_n) converge vers b, la suite $(b_n - b)$ converge vers 0. Par la question précédente, $(b_n - b)$ converge en moyenne vers 0, autrement dit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b) = 0.$$
Or
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - b.$$
Par conséquent, $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ converge vers b ; autrement dit, (b_n) converge en moyenne vers b.

(b) La suite (μ_n) ne converge pas. On peut le voir en remarquant que ce n'est pas une suite de Cauchy. En effet,

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| = \begin{cases} |-1-1| = 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ |1-(-1)| = 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans tous les cas $|\mu_{n+1} - \mu_n|$ vaut 2, donc ne tend pas vers 0. En conséquence, la suite (μ_n) n'est pas de Cauchy, et ne converge donc pas.

En revanche, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notamment, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right| \leq \frac{1}{n}$, et donc $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right)$ tend vers 0, c'est à dire que (μ_n) converge en moyenne vers 0.

On en déduit qu'une suite convergeant en moyenne ne converge pas nécéssairement (alors que la réciproque est vraie).

3. Comme (δ_n) converge vers c, la question 2a montre que (δ_n) converge en moyenne vers c :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k = c.$$

Mais

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = \frac{c_n}{n-1} - \frac{c_1}{n-1}.$$

Comme $\left(\frac{c_1}{n-1}\right)$ converge vers 0, et que $\frac{n-1}{n}$ tend vers 1, on en déduit que

$$\frac{c_n}{n} = \frac{n-1}{n}\frac{c_n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k + \frac{c_1}{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} c.$$

4. (a) La fonction sin envoie l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans lui-même (car $\sin(x)$ est positif pour x dans $[0, \pi]$ et que $\sin(x) \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ pour tout x). La suite (u_n) est donc correctement définie. De plus on a $\sin(x) \leq x$ pour tout x positif. Notamment, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n.$$

La suite (u_n) est donc décroissante ; comme elle est minorée (par 0), elle converge vers un réel noté l.

Comme la fonction sin est continue, on a

$$l = \lim_n u_{n+1} = \lim_n \sin(u_n) = \sin(l).$$

La seule solution à l'équation $l = \sin(l)$ est $l = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers l.

(b) Comme u_n tend vers 0, on peut obtenir un développement asymptotique de $\sin(u_n)$ à partir d'un développement limité de sin en 0 (puis de $(1-x)^r$ en $x = 0$) :

$$\begin{aligned} v_n = u_{n+1}^r - u_n^r &= (\sin(u_n))^r - u_n^r \\ &= (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^r - u_n^r \\ &= u_n^r \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)) - 1\right) \\ &= u_n^r \left(1 - r\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\right) \\ &= -\frac{r}{6}u_n^{r+2} + o(u_n^{r+2}). \end{aligned}$$

Comme (u_n) tend vers 0, (u_n^{r+2}) ne peut converger vers une limite non nulle que si $r = -2$. On a alors

$$v_n = \frac{1}{3} + o(1),$$

autrement dit (v_n) converge vers 1/3.

(c) Par la question 3, comme $\left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right)$ converge vers 1/3, alors $\left(\frac{u_n^{-2}}{n}\right)$ converge également vers 1/3. On a donc (en $n \to \infty$)

$$u_n^{-2} \sim \frac{n}{3},$$

d'où

$$u_n \sim \left(\frac{n}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{n}}.$$