**Université Pierre et Marie Curie**
**Master EF 1$^{\text{ère}}$ année - CAPES**
**2011 - 2012**
**Analyse et probabilités**

**Examen final**
**Durée : 4h**

*Les exercices 1 à 3 portent sur l'analyse et comptent pour 3/4 de la note.*
*Les exercices 4 à 6 portent sur les probabilités et comptent pour 1/4 de la note.*

**Exercice 1.**
On va montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas de limite pour $n$ tendant vers $\infty$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\lim_n \cos(n) = \lambda,$$

pour un certain réel $\lambda$.

1. Exprimer $\cos(n+1)+\cos(n-1)$ sous forme de produit. En déduire que $\lambda = 0$.
2. Linéariser la fonction $\cos^2(x)$. En déduire que $\lambda$ vérifie la relation
$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$
3. En conclure que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas non plus de limite (on pourra considérer la suite $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$).

**Exercice 2.**
On s'intéresse à la série
$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{1}$$

1. Montrer que la série (1) est convergente. Est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$ est absolument convergente et que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right).$$
3. Montrer l'égalité
$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \mathrm{d}x.$$
4. Pour $x \in [0,1]$, montrer l'inégalité $x^{2n} - x^{2n+1} \geq 0$.
5. Pour $x \in [0,1[$, en déduire l'encadrement
$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \leq \frac{1}{1+x}.$$

6. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(2).$$

7. On considère une suite positive $(u_n)$ décroissante et tendant vers 0. Montrer l'encadrement
$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \leq \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n+1} u_n.$$

8. En déduire une approximation de $\ln(2)$ par un rationnel à 0.2 près (c'est-à-dire, trouver un rationnel $q$ avec $|q - \ln(2)| \leq 0.2$). La série (1) est-elle une bonne manière pour calculer une valeur approchée de $\ln(2)$ ?

**Exercice 3.**
On cherche à calculer de manière approchée une intégrale. On va étudier la méthode de Simpson, c'est-à-dire l'approximation
$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)). \tag{2}$$
Dans tout ce qui suit, la fonction $f$ est supposée être de classe $\mathcal{C}^4$.

1. Montrer que la méthode de Simpson est exacte si la fonction $f$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 (c'est à dire que l'approximation (2) est en fait une égalité).

2. On considère la fonction
$$E(t) = \int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x - \frac{t}{3}(f(-t) + 4f(0) + f(t)).$$
Montrer que $E$ est de classe $\mathcal{C}^4$ et vérifie $E(0) = E'(0) = E''(0) = 0$. Montrer l'égalité
$$E'''(t) = -\frac{t}{3}\left(f'''(t) - f'''(-t)\right).$$

3. En déduire les majorations successives
$$|E'''(t)| \leq \frac{2t^2}{3} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|, \quad |E''(t)| \leq \frac{2t^3}{9} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|,$$
$$|E'(t)| \leq \frac{t^4}{18} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|, \text{ et } |E(t)| \leq \frac{t^5}{90} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

4. En déduire que l'erreur dans la méthode de Simpson est majorée par
$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right) \right| \leq \frac{1}{90} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

5. Par un changement de variables, montrer la majoration suivante de l'erreur sur un segment quelconque (noter que $32 \times 90 = 2880$) :
$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

6. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ par un rationnel à $1/120$ près (c'est-à-dire, donner un rationnel $q$ tel que $|\ln(2) - q| \leq 1/120$). On pourra donner une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ (noter que $120 \times 24 = 2880$).

7. Montrer que pour un entier $n$ donné

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{(b-a)}{6n}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2n})\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

où l'on a posé, pour $0 \leq k \leq 2n$, $x_k = a + \frac{k}{2n}(b-a)$ (on pourra subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en $n$ intervalles égaux).

En déduire une méthode efficace pour donner une approximation de $\ln(2)$ (comparer avec la dernière question de l'exercice 2) ?

**Exercice 4 (Questions de cours).**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$, à valeurs dans un espace $E$.

1. Donner la définition de la loi de probabilité de $X$.
2. Est-ce vrai que la fonction de répartition de $X$ est strictement croissante ? Si oui, justifier ; si non, donner un contre-exemple.

**Exercice 5.**
On considère une pièce équilibrée dont une face porte le numéro 1 et l'autre le numéro 2. On jette cette pièce deux fois de suite.

1. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ correspondant à cette expérience.

Soient $X$ et $Y$ les variables aléatoires donnant respectivement le minimum et le maximum des deux valeurs obtenues.

2. Déterminer la loi du couple $Z = (X, Y)$.
3. Déterminer les lois marginales de $Z$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 6** *(inspiré du concours d'entrée HEC, option économique, 2006)*
Dans tout l'exercice, $\lambda$ désigne un nombre réel dans l'intervalle $]0,1[$.
On suppose donné une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $p_n$ le paramètre de la variable aléatoire $X_n$. On suppose que $p_0$ appartient à l'intervalle $]0,1[$ et que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = \lambda\mathbb{P}(X_n = 1) = \lambda p_n.$$

   Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, résoudre les question suivantes.

   (a) Montrer que : $p_{n+1} = (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n$.
   (b) En déduire que $0 < p_n < 1$.
   (c) Exprimer la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})$ en fonction de $p_n$, $p_{n+1}$ et $\lambda$. Les variables $X_n$ et $X_{n+1}$ sont-elle indépendantes ?

2. On suppose maintenant que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et identiquement distribuées, de paramètre $p$, où $p$ appartient à l'intervalle $]0,1[$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, donner, en justifiant brièvement,

   (a) la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})$,
   (b) la loi de $Y_n$, où $Y_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$,
   (c) l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$.