Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Examen final : corrigé

Exercice 1.

1. On a
$$\cos(n+1)+\cos(n-1) = (\cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)) + (\cos(n)\cos(1) + \sin(n)\sin(1)) = 2\cos(n)\cos(1).$$
En passant à la limite $n \to \infty$, on obtient $2\lambda = 2\cos(1)\lambda$, et donc $\lambda = 0$, puisque $\cos(1) \neq 1$.

2. On a $\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$. En substituant $x = n$ et en passant à la limite $n \to \infty$, on obtient
$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda+1).$$

3. Si la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers une limite λ, on aurait à la fois $\lambda = 0$ et $\lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda+1)$ ce qui est contradictoire. Par conséquent, la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4. On a $\sin(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$. Si $(\sin(n))$ convergeait vers une limite μ, alors $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait aussi vers μ. Or $\cos(n) = \frac{1}{\cos(1)}(\sin(n+1) + \sin(n)\sin(1))$ serait alors une suite convergente (de limite $\mu\frac{1+\sin(1)}{\cos(1)}$). On arrive à une contradiction.

Exercice 2.

1. On est en présence d'une série alternée (les signes alternent et la valeur absolue décroit) qui est donc convergente. La série des valeurs absolues est la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, qui n'est pas convergente. On n'a donc pas une série absolument convergente.

2. On a $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{4n^2}$ est convergente et à termes positifs, la série est absolument convergente. On écrit ensuite, en séparant termes d'ordre pair et termes d'ordre impair,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_N \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_N \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right).$$

3. Cela vient simplement de l'égalité $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \int_0^1 \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \mathrm{d}x$. L'intervertion somme-intégrale est autorisée puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de termes.

4. On a $x^{2n} - x^{2n+1} = x^{2n}(1-x)$. Or, pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^{2n} \geq 0$ et $1 - x \geq 0$.

5. Comme les termes de la somme sont positifs, on a, pour tout x de $[0,1[$,
$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

6. On est dans le cadre des hypothèses du théorème de convergence dominée : la suite de fonctions $\left(\sum_{n=1}^{N} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)\right)$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, toutes les intégrales sont bien définies (on a des fonctions continues par morceaux) et on a, d'après la question précédente, l'hypothèse de domination $\left|\sum_{n=1}^{N} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)\right| \leq \frac{1}{1+x}$. L'intervertion de l'intégrale et de la limite $N \to \infty$ est donc autorisé et donne
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2).$$

7. D'après les hypothèses de l'énoncé, la série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée. Par conséquent, les deux suites $\left(\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n+1}u_n\right)$ et $\left(\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^{n+1}u_n\right)$ convergent vers la somme de la série. Il suffit ensuite de remarquer que la première suite est croissante, alors que la deuxième est décroissante. En effet, la différence de deux termes consécutifs est, pour la première $(-1)^{2N+3}u_{2N+2}+(-1)^{2N+2}u_{2N+1} = (u_{2N+1}-u_{2N+2}) \geq 0$, et pour la deuxième $(-1)^{2n+4}u_{2N+3}+(-1)^{2N+3}u_{2N+2} = (u_{2N+3}-u_{2N+2}) \leq 0$.

8. Les deux questions précédentes montrent

$$\frac{7}{12} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \leq \ln 2 \leq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{7}{12}+\frac{1}{5},$$

On obtient l'approximation $\ln(2) \simeq \frac{7}{12} = 0,58333\ldots$, exacte à $\frac{1}{5} = 0.2$ près.

Par la question 7, la somme partielle d'ordre N de la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une approximation de $\ln(2)$ à $\frac{1}{N+1}$ près, c'est donc une convergence lente (pour avoir un chiffre significatif de plus, on doit calculer la somme de $10N$ termes au lieu de N termes).

Exercice 3.

1. Par linéarité de l'intégrale et de la fonction $f \mapsto \frac{1}{3}\left(f(-1)+4f(0)+f(1)\right)$, il suffit de montrer que la formule est exacte pour les monômes 1, X, X^2 et X^3. La formule est évidente pour X et X^3 qui sont pairs et ont donc une intégrale nulle sur $[-1,1]$, et c'est un simple calcul pour 1 et X^2 (on a $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 = \frac{1}{3}(1+4\times 1+1)$ et $\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(1+4\times 0+1)$).

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^4$, sa primitive est de classe $\mathcal{C}^5$, et les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto tf(-t)$ sont de classe $\mathcal{C}^4$. La fonction E est donc de classe $\mathcal{C}^4$. On trouve alors (noter que $\int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x = F(t)-F(-t)$ pour une primitive F de f, de sorte que $t \mapsto \int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x$ se dérive en $t \mapsto f(t)+f(-t)$)

$$E'(t) = \frac{2}{3}\left(f(t)+f(-t)\right) - \frac{t}{3}\left(f'(t)-f'(-t)\right) - \frac{4}{3}f(0),$$

$$E''(t) = \frac{1}{3}\left(f'(t)-f'(-t)\right) - \frac{t}{3}\left(f''(t)+f''(-t)\right),$$

$$E'''(t) = -\frac{t}{3}\left(f'''(t)-f'''(-t)\right).$$

On vérifie alors $E(0) = E'(0) = E''(0) = 0$.

3. Le théorème des accroissements finis appliqué à f''' (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $[-t,t]$ montre que

$$|f'''(t)-f'''(-t)| \leq 2t \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|,$$

d'où la première majoration. La majoration de E'' s'obtient en écrivant (remarquer que $E''(0) = 0$)

$$|E''(t)| = |E''(t)-E''(0)| = \left|\int_0^t E'''(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{3}\int_0^t x^2\mathrm{d}x \sup_{x\in[-1,1]}|f^{(4)}(x)| = \frac{2t^3}{9}\sup_{x\in[-1,1]}|f^{(4)}(x)|.$$

Les majorations de E' et E s'obtiennent de la même manière.

4. Le membre de gauche est simplement égal à $|E(1)|$, il ne s'agit donc que d'une réécriture de la dernière majoration.

5. Il suffit d'appliquer la question précédente à la fonction $g(x) = \frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+x\frac{b-a}{2}\right)$ (la fonction $x \mapsto \frac{a+b}{2}+x\frac{b-a}{2}$ étant la fonction affine envoyant $[-1,1]$ sur $[a,b]$). La dérivée 4$^{\text{ème}}$ est alors $g^{(4)}(x) = \frac{(b-a)^5}{2^5}f^{(4)}(x) = \frac{(b-a)^5}{32}f^{(4)}(x)$.

6. L'inégalité précédente montre que appliquée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$ montre

$$\left|\ln(2)-\frac{25}{36}\right| = \left|\ln(2)-\frac{1}{6}\left(1+4\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1^5}{2880}24 = \frac{1}{120}.$$

On a donc une approximation $\ln(2) \simeq \frac{25}{36} = 0.69444\ldots$, exacte à $\frac{1}{120}$ près.

7. On applique la formule de Simpson sur chacun des n intervalles $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1 \ldots, n$. On obtient alors n intervalles sur lesquelle l'erreur est de $\frac{(b-a)^5}{n^5} \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)|$. On ajoute ces n erreurs et l'inégalité triangulaire donne la majoration de l'énoncé.

   Cette méthode permet un calcul approché de $\ln(2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$. On obtient de bien meilleurs résultats pour approcher $\ln(2)$, puisqu'un calcul avec $10n$ points au lieu de n divise l'erreur par 10^4.

Exercice 4.

1. Voir le cours.

2. Non, la fonction de répartition F_X de la loi de probabilité de X est croissante, mais pas forcément strictement croissante. En effet, soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$. Alors, par définition :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \mathbb{P}^X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

   Ainsi, pour tout $t < 0$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \leq \mathbb{P}(X < 0) = 0$. La fonction de répartition est constante égale à 0 sur $\mathbb{R}^-$, et n'est donc pas strictement croissante.

Exercice 5.

1. On choisit comme univers $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} = \{1,2\}^2$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Etant donné que la pièce est équilibrée et que les jets sont indépendants, on munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$, de sorte que :

$$\forall (i,j) \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

2. Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\{1,2\}$, de sorte que le couple $Z = (X,Y)$ est à valeurs dans $\{1,2\}^2$. Par définition, la loi du couple Z, notée $\mathbb{P}^Z$ est donnée, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, par $\mathbb{P}^Z(\{(i,j)\}) = \mathbb{P}(Z = (i,j)) = \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^Z(\{(1,1)\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4},\\
&\mathbb{P}^Z(\{(1,2)\}) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{1}{2},\\
&\mathbb{P}^Z(\{(2,1)\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,\\
&\mathbb{P}^Z(\{(2,2)\}) = \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. D'après le cours, la loi de la variable aléatoire X est donnée, pour $i \in \{1,2\}$, par $\mathbb{P}^X(\{i\}) = \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}^Z(\{(i,j)\})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X(\{1\}) &= \mathbb{P}^Z(\{(1,1)\}) + \mathbb{P}^Z(\{(1,2)\}) = \frac{3}{4},\\
\mathbb{P}^X(\{2\}) &= \mathbb{P}^Z(\{(2,1)\}) + \mathbb{P}^Z(\{(2,2)\}) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

   De manière analogue, la loi de la variable aléatoire Y est déterminée par les valeurs :

$$\mathbb{P}^Y(\{1\}) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}^Y(\{2\}) = \frac{3}{4}.$$

   Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, $\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{16}$, d'où $\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.

Exercice 6.

1. (a) Soit un entier n de $\mathbb{N}$. Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{X_n = 0\}).$$

Supposons que $0 < p_n < 1$, alors d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= p_n^2 + \lambda p_n(1 - p_n) = (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n. \end{aligned}$$

Supposons que $p_n = 0$, alors $0 \leq \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{X_n = 1\}) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, d'où

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{X_n = 1\}) = 0.$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités conditionnelles appliquée au deuxième membre uniquement :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 0 + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= 0 + \lambda 0(1 - 0) = (1 - \lambda)0^2 + \lambda 0. \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que l'identité est vérifiée lorsque $p_n = 1$.

(b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par "$0 < p_n < 1$". Par hypothèse la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que pour un entier positif n, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, d'après la question (a)

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n > 0, \text{ (car } p_n > 0 \text{ et } \lambda < 1), \\ p_{n+1} &= (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n < (1 - \lambda)p_n + \lambda p_n = p_n < 1, \text{ (car } p_n < 1), \end{aligned}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. On a donc montré que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire. Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(c) La covariance recherchée est bien définie car la variable aléatoire X_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs. D'après une conséquence de la définition de covariance, $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1})$. En utilisant le théorème du transfert, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n X_{n+1}) &= \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} ij\, \mathbb{P}(\{X_n = i\} \cap \{X_{n+1} = j\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1), \text{ (d'après la formule des probabilités conditionnelles)} \\ &= p_n^2. \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{E}(X_n) = 0.\mathbb{P}(X_n = 0) + 1.\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$. D'où :

$$\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = p_n^2 - p_n p_{n+1} = p_n(p_n - p_{n+1}).$$

Si les variables aléatoires X_n et X_{n+1} étaient indépendantes, alors d'après un résultat du cours on aurait $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = 0$. Or d'après les questions (a) et (b) on a, $0 < p_{n+1} < p_n$, d'où $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) > 0$. On en déduit que les variables aléatoires X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

2. (a) Soit un entier n de $\mathbb{N}$. Comme les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes, nous savons, d'après un résultat du cours, que $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = 0$,

(b) Nous avons vu en cours que la somme de $n+1$ variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et identiquement distribuées de même paramètre p, suit une loi binomiale de paramètres $n+1$ et p. Ainsi, Y_n suit une loi binomiale de paramètres $n + 1$ et p.

(c) La variable aléatoire Y_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle admet donc une espérance. Par linéarité de l'espérance, nous savons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) \\ &= (n + 1)\mathbb{E}(X_1), \quad \text{(car les variables aléatoires } (X_k)_{k=0}^n \text{ sont identiquement distribuées)} \\ &= (n + 1)p, \quad \text{(car } \mathbb{E}(X_1) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1) + 0\mathbb{P}(X_1 = 0) = p). \end{aligned}$$