Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2011 - 2012

Formulaire de trigonométrie

1 Fonctions trigonométriques

On définit les fonctions cos, sin et tan par les formules

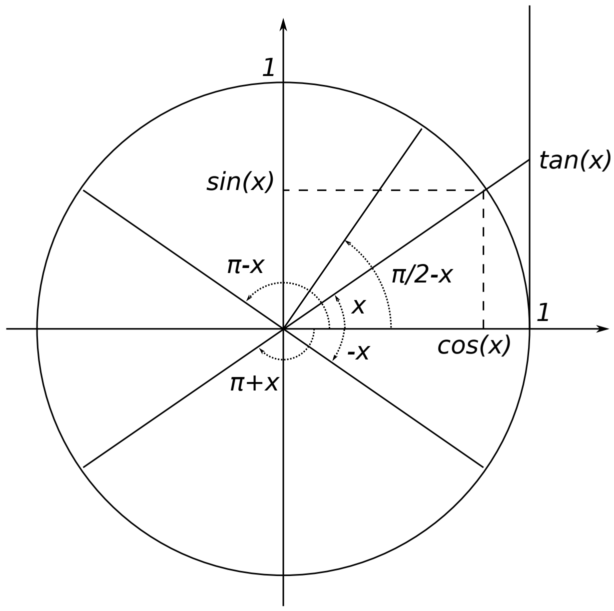
$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \mathrm{Re}(e^{ix}),\ \ \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{ix}) \text{ et } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(on rappelle que e^z est défini pour tout nombre complexe z comme la somme $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$). On a notamment

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

On définit le nombre $\pi/2$ comme le plus petit réel positif x tel que $\cos(x) = 0$.
Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.
La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et π-périodique de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{R}$.
Les fonctions trigonométriques satisfont les propriétés suivantes, qui se vérifient simplement sur le cercle trigonométrique.

- $\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$;
- $\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x)$;
- $\tan(x) = \tan(x + \pi) = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x)$;
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et donc $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, d'où l'on déduit $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.



On peut donner explicitement quelques valeurs remarquables :

$$\cos(0) = 1\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On en déduit

$$\sin(0) = 0\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

et

$$\tan(0) = 0\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{ indéterminé.}$$

2 Sommes et produits

Angle somme :

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$;
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;
- $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$;
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$;
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$;
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

Produit en somme :

- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$;
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$;
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Somme en produit :

- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x) + \cos(y) = -2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

Formules utilisant la tangente de l'arc moitié :

- $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
- $\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
- $\tan(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$.

Ces dernières formules fournissent notamment une paramétrisation du cercle par des fractions rationnelles

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

On peut exprimer $\cos(nx)$ comme un polynôme en $\cos(x)$:

$$\cos(nx) = T_n(\cos(x)),\ \text{où } T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

(les T_n sont appelés *polynômes de Tchebychev*).
Formule de De Moivre :

$$(\cos(a) + i\cos(b))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

On peut linéariser les puissances de cos et sin, ainsi que leur produits :

$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ix(2k-n)},$$

$$\sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{2i^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} e^{ix(2k-n)}.$$

3 Fonctions réciproques

La fonction sin est bijective de tout intervalle de la forme $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$. On note arcsin sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
La fonction cos est bijective de tout intervalle de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$ dans $[-1,1]$. On note arccos sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.
La fonction tan est bijective de tout intervalle de la forme $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ces trois fonctions vérifient les formules suivantes :

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}, \ \ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \operatorname{signe}(x)\frac{\pi}{2}.$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

où $k = 1$ si $xy > 1$ et $x > 0$; $k = -1$ si $xy > 1$ et $x < 0$; $k = 0$ si $xy < 1$.

4 Dérivées

Les dérivée des fonctions trigonométriques sont données par

$$\sin'(x) = \cos(x), \ \ \cos'(x) = -\sin(x), \ \ \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x),$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction tan étant de la forme $\frac{u'}{u}$, on a $\tan(x) = (\ln|\cos(x)|)'$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.