

DS 1 - 23 Septembre 2011

Exercice 1. Soient A et B deux parties non-vides de \mathbb{R} vérifiant les deux propriétés suivantes :

- 1) $\forall a \in A$ et $\forall b \in B, a \leq b$;
- 2) $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A$ et $\exists b \in B$ tels que $b - a \leq \epsilon$.

Montrer que $\sup A = \inf B$. (On dit que les ensembles sont adjacentes.)

Exercice 2. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$r_0 = 2 \text{ et } r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{Q}$.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 1, |r_{n+1} - r_n| < \frac{1}{2}|r_n - r_{n-1}|$.
- 3) En déduire que la suite est de Cauchy.
- 4) La limite est-elle dans \mathbb{Q} ? Justifier votre réponse.