Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2011 - 2012
Analyse et probabilités

Cours d'analyse

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Premières définitions

Une série est une suite dont les termes sont écrits sous la forme $\sum_{n=0}^{N} u_n$, où (u_n) est une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ réel ou complexe. On emploiera la notation $\sum u_n$ pour désigner la série $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$. Dans cette écriture, la suite (u_n) est appelé *terme général* de la série $\sum u_n$, et les sommes $\sum_{n=0}^{N} u_n$ sont appelées *sommes partielles* de la série $\sum u_n$. Remarquer que toute suite peut être mise sous forme de série, en utilisant l'écriture

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} v_n - v_{n-1},$$

où l'on a posé par convention $v_{-1} = 0$.

Définition 1.1.1. *Si la suite* $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$ *admet une limite, on dit que la série* $\sum u_n$ *est* convergente. *La limite de* $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$ *est appelée* somme *de la série* $\sum u_n$ *et est* notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. *Pour une série convergente, les termes de la suite*

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

sont appelés restes *de la série.*

Il faut être bien conscient du fait que la notation $\sum_{n=0}^{\infty}$ contient une limite, et est donc à manier avec précaution. Notamment, on prendra garde a ne pas écrire le reste d'une série, et a ne pas parler de la somme d'une série avant de vérifier la convergence !

Propriété 1.1.2. *Une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente, et on a l'identité, pour deux scalaires λ et μ,*

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$$

Autrement dit, l'ensemble des séries convergentes sur un espace $(E, \|\cdot\|)$ constitue un espace vectoriel, et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est linéaire.

Propriété 1.1.3. *Les restes d'une série convergente tendent vers 0.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

le membre de droite étant convergent. □

Propriété 1.1.4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.*

Démonstration. En passant à la limite dans l'égalité

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

(licite car le membre de droite converge) on obtient

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0.$$

□

La réciproque de cette propriété est fausse, comme on peut le voir sur l'exemple de la série $\sum \frac{1}{n}$. En effet, le terme général de cette série tend vers 0, alors que la série n'est pas convergente, comme nous allons le voir.

Nous énonçons le critère de Cauchy pour les séries, qui n'est qu'une adaptation directe du critère de Cauchy pour les suites.

Propriété 1.1.5. *Si une série $\sum u_n$ converge, alors ses sommes de Cauchy $\sum_{n=p}^{q} u_n$ tendent vers 0 quand p et q tendent vers l'infini.*

Si le terme général de la suite est pris dans un espace de Banach (c'est à dire un espace vectoriel normé complet), c'est une équivalence.

Dans la plupart des cas qui nous intéresserons, l'espace E sera $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes) ou l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Ces deux espaces sont des espaces de Banach.

Démonstration. Il suffit d'appliquer à la suite $\sum_{n=0}^{N} u_n$ le critère de Cauchy pour les suites, selon lequel une suite (u_n) convergente est telle que $\|u_q - u_p\|$ tend vers 0 quand q et p tendent vers l'infini (avec, par définition, équivalence dans un espace complet). En effet, on a $\sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n = \sum_{n=p}^{q} u_n$. □

La propriété 1.1.5 nous permet de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$$

Or $\frac{N+1}{2N}$ converge vers 1/2. La série harmonique ne vérifie donc pas le critère de Cauchy : elle diverge.

Définition 1.1.6. *Si la série* $\sum \|u_n\|$ *est convergente, on dit que la série* $\sum u_n$ *est* absolument convergente.

La propriété suivante permet de réduire l'étude de la convergence de nombreuses séries à l'étude des séries à termes positis.

Propriété 1.1.7. *Dans un espace de Banach, une série absolument convergente est convergente, et on peut écrire*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| .$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Montrons que la série $\sum u_n$ satisfait le critère de Cauchy.

On a, si $m < p$

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{p} u_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{p} \|u_n\| \underset{m,p\to\infty}{\to} 0,$$

puisque la série $\sum \|u_n\|$ converge, et satisfait donc le critère de Cauchy. Pour montrer l'inégalité, il suffit de remarquer que $\left\|\sum_{n=0}^{N} u_n\right\|$ converge vers $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\|$ (l'application norme est continue) et de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|u_n\| .$$

□

1.2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on va donner des critères de convergence pour les séries à termes positifs. L'intérêt est que la propriété 1.1.7 permet de ramener l'étude de nombreuses séries aux séries à termes positifs.

Propriété 1.2.1. *Soit* $\sum u_n$ *une série dont le terme général est positif. Alors* $\sum u_n$ *converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Dans ce cas on a alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Démonstration. Comme la suite (u_n) est à termes positifs, la suite $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$ est croissante. Elle converge alors si et seulement si elle est bornée, et dans ce cas sa limite est égale à sa borne supérieure. □

Propriété 1.2.2. *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à terme général positif telles que* $u_n \leq v_n$.
- *Si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*
- *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration. Comme $u_n \leq v_n$, on a $\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$. Si $\sum v_n$ converge, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n \leq \sum_{n=0}^\infty v_n.$$

Par la propriété 1.2.1, cela montre que $\sum u_n$ converge, ses sommes partielles étant bornées. L'autre implication est la contraposée de la première. □

Passons maintenant à l'étude de certaines séries particulières.

La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ se montre de manière très simple, et cette série va nous donner des critères de convergence pour d'autres séries :

Propriété 1.2.3. *Soit a un nombre complexe. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^\infty a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Démonstration. Premièrement, on écarte le cas $a = 1$, pour lequel les sommes partielles valent $\sum_{n=0}^N 1 = N + 1$; la série est donc divergente.

Dans le cas $a \neq 1$, on remarque que $(1-a)\sum_{n=0}^N a^n = \sum_{n=0}^N a^n - \sum_{n=1}^{N+1} a^n = 1 - a^{N+1}$. On a donc, en divisant par $1 - a$ (qui est non nul),

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

La série converge donc si et seulement si a^{N+1} a une limite quand N tend vers l'infini, ce qui revient bien à $|a| < 1$. □

On remarque que la suite (a^n) est la seule (à multiplication par une constante près) à vérifier l'égalité $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$. On peut en fait obtenir un critère de convergence proche de celui de la série géométrique pour les suites (u_n) telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Théorème 1.2.4 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit u_n une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel l.*
- *si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge ;*
- *si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Ce critère ne permet pas de conclure dans le cas $l = 1$ comme on peut le voir sur les exemples $\sum \frac{1}{n}$ (qui diverge) et $\sum \frac{1}{n^2}$ (qui converge), pour lesquels la limite des rapports des termes consécutifs vaut 1.

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas $l < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement inférieure à 1, si $l < 1 - \varepsilon < 1$, alors il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \varepsilon$. On peut donc écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0}}{(1-\varepsilon)^{n_0}}(1-\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1-\varepsilon)^N$ converge, alors $\sum u_N$ converge aussi.

Le cas $l > 1$ se traite de manière similaire : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement suérieure à 1, donc pour $1 < 1+\varepsilon < l$ il existe un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1+\varepsilon$ si $n \geq n_0$. On écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{n=n_0}^{N-1}(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{N-n_0},$$

ce qui donne $u_N \geq \frac{u_{n_0}}{(1+\varepsilon)^{n_0}}(1+\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1+\varepsilon)^N$ diverge, $\sum u_N$ diverge aussi. □

En fait, on peut énonce un résultat un peu moins restrictif en utilisant la notion de limites inférieures et supérieures en lieu et place de limites, comme dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *Soit u_n une suite de réels strictement positifs. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

alors la série $\sum u_n$ converge. Si

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

alors la série diverge.

On rappelle que la limite supérieure d'une suite (u_n), notée $\limsup_{n\to\infty} u_n$, est définie par

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k.$$

Cette limite a bien un sens (dans $[-\infty,\infty]$) et est égale à une borne inférieure car la suite $(\sup_{k\geq n} u_k)$ est une suite décroissante, elle converge donc (dans $[-\infty,\infty]$) vers sa borne inférieure. On définit également la limite inférieure par $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\limsup_{n\to\infty}(-u_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k$.

Toute suite réelle admet alors une limite inférieure et une limite supérieure (qui peuvent l'une comme l'autre valoir $\pm\infty$) et la suite converge si et seulement si

$$\liminf_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n,$$

la valeur commune des limites inférieure et supérieure vaut $\lim_{n\to\infty} u_n$. De plus, si pour tout n on a l'inégalité $u_n \leq v_n$, alors $\limsup_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} v_n$.

La preuve du théorème 1.2.5 se fait alors exactement comme celle du théorème 1.2.4, en utilisant la propriété suivante des limites supérieures (et inférieures) :

Propriété 1.2.6. *Si $\limsup_{n\to\infty} u_n = l < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \leq l+\varepsilon$.*
Si $\liminf_{n\to\infty} u_n = l > -\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \geq l-\varepsilon$.

On peut énoncer un autre critère de convergence en se basant sur le fait que la série géométrique est la seule à vérifier $(a^n)^{1/n} = a$. On peut en fait étendre le critère de convergence des séries géométriques aux séries dont le terme général u_n est tel que $u_n^{1/n}$ converge.

Propriété 1.2.7 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que la suite* $(u_n^{1/n})$ *converge vers une limite* l*.*
- *Si* $l < 1$*, alors la série converge ;*
- *Si* $l > 1$*, alors la série diverge.*

Démonstration.
- Si $l < 1$, pour un ε tel que $l < 1-\varepsilon < 1$, il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$, on a $u_n^{1/n} \leq 1-\varepsilon$. On a donc, pour $n \geq n_0$, $u_n \leq (1-\varepsilon)^n$. Comme la série géométrique de raison $1-\varepsilon$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.
- Si $l > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que $u_n^{1/n} > 1$ dès que $n \geq n_0$. On a donc pour $n \geq 0$ $u_n \geq 1$. Par conséquent, la suite u_n ne converge pas vers 0, et la série $\sum u_n$ est donc divergente.

□

On peut légèrement affaiblir les hypothèses de ce théorème en remplaçant la limite par une limite supérieure :

Propriété 1.2.8 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} < 1$*, alors la série converge ;*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$*, alors la série diverge.*

Démonstration. La preuve reste essentiellement la même, on doit juste remarquer que si $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$, alors $u_n^{1/n} > 1$ pour une infinité de valeurs de n (plutôt que pour tout n assez grand). □

De même que pour la règle de d'Alembert, on ne peut pas conclure immédiatement dans le cas ou la limite supérieure vaut 1, comme on peut le voir sur les exemples des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il existe des cas pour lesquels la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. Par exemple, si on considère la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on remarque que

$$u_n^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1/2 < 1$, alors que $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Par conséquent, la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. La raison est que la règle de Cauchy ne considère les valeurs de chaque u_n dans l'absolu, alors que la règle de d'Alembert ne considère que les accroissements relatifs entre deux termes consécutifs, qui peuvent être grand alors que les termes de la séries sont petits.

On a en fait l'inégalité suivante, qui montre que le critère de Cauchy est plus fin que le critère de d'Alembert.

Propriété 1.2.9. *Soit* u_n *une suite de réels positifs. Alors on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Démonstration. Montrons $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On pose $l = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$. On a donc, pour $N \geq n_0$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (l+\varepsilon) = (l+\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On peut donc écrire,

$$u_N^{1/N} = \left(\frac{u_{n_0}}{(l+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{1/N} (l+\varepsilon).$$

En passant à la limite, on trouve

$$\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \leq (l+\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \leq l = \limsup_{N\to\infty} \frac{u_{N+1}}{u_N}$.

On a donc montré la troisème inégalité. La première se montre de la même manière, et la deuxième est évidente. □

On veut maintenant pouvoir déterminer la convergence de séries pour lesquelles les règles de Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent pas. L'exemple typique de telles séries étant les séries puissances (ou *séries de Riemann*) du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On a un critère très simple pour la convergence de ces séries.

Propriété 1.2.10. *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. On sait que si $\alpha < \beta$, alors $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Par conséquent, il suffit de montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, et la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dès que $\alpha > 1$.

Le cas $\alpha = 1$ a déjà été traité, il reste donc a traiter le cas $\alpha > 1$. On écrit

$$\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{(2^N)^\alpha} = \frac{2^{N+1}-2^N}{(2^\alpha)^N} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^N}.$$

Soit n un entier naturel, et N l'entier tel que $2^N < n < 2^{N+1} - 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{q=0}^{N} \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{q=0}^{N} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} < \infty.$$

La derière série converge car $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont donc bornées. Comme la série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. □

Remarquons que la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} &= (1+1/n)^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln(1+1/n)} \\
&= e^{-\alpha(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right))} \\
&= 1 - \alpha\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On va en déduire un critère de convergence pour toutes les séries dont le terme général admet un développement limité semblable.

Propriété 1.2.11 (Règle de Duhamel)**.** *Supposons que la suite u_n vérifie le développement suivant en $n \to \infty$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :
- *si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*
- *si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Supposons $1 < \alpha$. On choisit $1 < 1 + \varepsilon < \alpha$. On a

$$\begin{aligned} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}\right) &= n\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (1 + \varepsilon - \alpha) + o(1). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}$ converge vers $1 + \varepsilon - \alpha$, qui est strictement négatif. Par conséquent, cette suite est négative à partir d'un certain rang n_0. On a donc

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} = \frac{n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}.$$

À partir du rang n_0, on a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0} n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, alors $\sum u_n$ aussi. La preuve pour le cas $\alpha < 1$ est similaire. □

Quand on sait comparer les termes généraux de deux séries, on peut en déduire des comparaisons entre les sommes partielles ou les restes des séries, d'après la propriété suivante.

Propriété 1.2.12. *Soit u_n et (v_n) deux suites positives.*
- *Supposons que la série $\sum u_n$ diverge*
  - *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$*
  - *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = o\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$;*
  - *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = O\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$.*
- *Supposons que la série $\sum v_n$ converge.*
  - *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n \sim \sum_{n=N}^\infty v_n$*
  - *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n = o\left(\sum_{n=N}^\infty v_n\right)$;*
  - *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^\infty u_n = O\left(\sum_{n=N}^\infty v_n\right)$.*

Démonstration. On fait seulement la preuve pour le premier cas, les cinq autres étant semblables (ou plus simples). Comme $u_n \sim v_n$, pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que si $n \geq n_0$, on a

$$1 - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1 + \varepsilon.$$

En conséquence, à partir du rang n_0, on a

$$(1 - \varepsilon)v_n < u_n < (1 + \varepsilon)v_n,$$

ce qui montre que $\sum v_n$ diverge, puisque $\sum u_n$ diverge.

Montrons maintenant l'équivalence des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1-\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{N} v_n < \sum_{n=0}^{N} u_n < \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

On en déduit l'encadrement

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} + (1-\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} + (1+\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}.$$

Or, puisque la série $\sum v_n$ diverge, la suite $\sum_{n=0}^{N} v_n$ tend vers ∞, ce qui implique que $\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}$ tend vers 0 et $\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}$ vers 1. On en conclut

$$1-\varepsilon < \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < 1+\varepsilon.$$

Ces inégalités étant vraies pour tout ε, on en déduit que les limites supérieure et inférieure valent 1, et donc que $\sum_{n=0}^{N} u_n \sim \sum_{n=0}^{N} v_n$ □

Dans la propriété 1.2.12, il est important que les deux suites soient positives (ou au moins qu'elles soient de signe constant à partir d'un certain rang). En effet, on peut construire le contre-exemple suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \ v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$, étant alternée, converge, alors que la série $\sum v_n$ diverge à cause du terme en $\frac{1}{n}$. Les deux suites sont pourtant équivalentes.

On énonce maintent le critère de comparaison séries/intégrales, qui permet de ramener l'étude de certaines séries à l'étude d'intégrales.

Théorème 1.2.13. *Soit $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction continue décroissante. Alors la série*

$$\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \right)$$

converge.

De ce théorème, on déduit que l'étude de la série $\sum f(n)$ peut se ramener à celle de la primitive de f :

Corollaire 1.2.14. *Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1.2.13. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0,\infty[$. De plus,*

– *dans le cas où $\sum f(n)$ converge, on a*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \ ;$$

– *dans le cas où $\sum f(n)$ diverge, on a le développement*

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\,dt + \sum_{n=0}^{\infty}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right) + o(1).$$

Preuve du théorème. Comme la fonction f est décroissante, on peut écrire

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \text{ si } t \in [n, n+1],$$

d'où on déduit

$$0 \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) - f(n+1).$$

En sommant de $n = 0$ à $n = N$, on obtient les inégalités

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \sum_{n=0}^{N} f(n) - f(n+1) = f(0) - f(N+1).$$

Comme la fonction f est décroissante et minorée, elle converge vers une limite en ∞. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right) \leq f(0) - \lim_{x\to\infty} f(x).$$

La série $\sum\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right)$ est donc une série à terme général positif dont les sommes partielles sont bornées. Il s'agit donc d'une série convergente. □

On peut par exemple déduire du corollaire 1.2.14 le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1),$$

où γ est une constante (dont les permières décimales sont 0.57721), appelée *constante d'Euler* (ou *d'Euler-Mascheroni*). On sait assez peu de chose sur γ, notamment on ignore encore à ce jour si elle est rationnelle ou non.

1.3 Séries à termes complexes

Propriété 1.3.1 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (u_n) une suite telle que $|u_n|$ soit décroissante et que deux termes consécutifs soient de signe opposés. Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si $u_N \leq 0$, on a*

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N+1} u_n.$$

On a donc une estimation de la vitesse de convergence :

$$|u_{N+1}| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq |u_N|.$$

Démonstration. Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$, on peut supposer que u_n est du signe de $(-1)^n$.

Considérons les deux suites (v_N) et (w_N) définies par

$$v_N = \sum_{N=0}^{2N+1} u_n \text{ et } w_N = \sum_{n=0}^{2N} u_n.$$

On va montrer que ces deux suites sont adjacentes, de sorte qu'elles convergent vers la même limite, ce qui permettra de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

Tout d'abord, on a $w_N = v_N + u_{2N} \geq v_N$, puisque les termes dela suite (u_n) d'indices pairs ont été supposés positifs. Ensuite, $v_{N+1} - v_N = u_{2N+2} + u_{2N+3} = (|u_{2N+2}| - |u_{2N+3}|) \leq 0$ (puisque la suite $(|u_n|)$ décroit), de sorte que (v_N) est croissante. De même (w_N) est décroissante. Enfin on a $|v_N - w_N| = |u_{2N+1}|$ qui tend vers 0. On a bien affaire à des suites adjacentes. □

Exemple : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$. De plus, on remarque qu'elle n'est pas absolument convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

On va montrer un résultat plus général que le théorème des séries alternées. On va tout d'abord montrer la propriété suivante, qui est un analogue discret de la formule d'intégration par parties.

Propriété 1.3.2 (Transformation d'Abel)**.** *Soit u_n et V_n deux suites à valeurs complexes. On pose*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \textit{et} \quad v_n = V_{n+1} - V_n.$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n V_n &= \sum_{n=1}^{N} (U_n - U_{n-1}) V_n + U_0 V_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} U_n V_n - \sum_{n=1}^{N} U_{n-1} V_n + U_0 V_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} U_n V_n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n V_{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}) + U_N V_N \\
&= -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.
\end{aligned}$$

□

Cette écriture permet de montrer le résultat suivant.

Propriété 1.3.3. *Soient u_n et V_n deux suites à valeurs complexes. Si la sommes partielles de la série $\sum u_n$ constituent une suite bornée et si la suite V_n est positive et décroit vers 0, alors la série $\sum u_n V_n$ converge.*

Démonstration. On reprend les notations de la propriété 1.3.2. En notant C un majorant de la suite (U_n), on a

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n V_n\right| = \left|-\sum_{n=p}^{q-1} U_n v_n + U_q V_q\right| \leq \left|\sum_{n=p}^{q-1} U_n v_n\right| + |U_q V_q| \leq C\left(\sum_{n=p}^{q-1} |v_n| + |V_q|\right).$$

Or, comme la suite (V_n) décroit, on a $|v_n| = |V_{n+1} - V_n| = V_n - V_{n+1}$. La somme du membre de droite est donc une somme télescopique, et on obtient

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n V_n\right| \leq C\left(\sum_{n=p}^{q-1} |v_n| + |V_q|\right) = C V_p$$

Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse quand p et q tendent vers l'infini. La série $\sum u_n V_n$ satisfait donc le critère de Cauchy. □

Un corollaire important de ce théorème est le suivant :

Corollaire 1.3.4. *Pour toute suite décroissante u_n et tout réel θ non multiple de 2π, les séries*

$$\sum e^{in\theta} u_n, \ \sum \cos(n\theta) u_n \ \text{et} \ \sum \sin(n\theta) u_n$$

convergent.

Démonstration. Comme on a

$$\sum \cos(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} + e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right) \ \text{et} \ \sum \sin(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} - e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right),$$

il suffit d'étudier la première série. Cette série rentre bien dans le cadre de la propriété 1.3.3 puisque la suite (u_n) est positive et décroit vers 0, et les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}$ vérifient (puisque comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$)

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

□

1.4 Séries doubles

Propriété 1.4.1. *Soit $(u_{n,m})$ une famille de réels positifs indexée par les couples $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout naturel m la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente et si la série $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$ converge, alors les séries $\sum_m u_{n,m}$ et $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$ convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. On a la majoration

$$\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_m u_{n,m}$ sont donc majorées, de sorte que cette série converge.

Ensuite, on a

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

En passant à la limite $M \to \infty$ (ce qui est licite puisque N est fini), on trouve

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m},$$

de sorte que les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ sont bornées. Comme cette série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. En passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Par symétries entre les indices n et m, l'égalité inverse est également vraie, et on en déduit l'égalité des sommes. □

De même, pour une famille de nombres complexes, on a la propriété :

Propriété 1.4.2. *Soit $(u_{n,m})$ une famille de nombres complexes indexée par les couples $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout naturel m la série $\sum_n |u_{n,m}|$ est convergente et si la série $\sum\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)$ converge, alors les séries $\sum_m |u_{n,m}|$ et $\sum\left(\sum_{m=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)$ convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. Prouver que les séries sont absolument convergentes se fait comme pour la propriété 1.4.1. Pour montrer l'égalité des sommes, on écrit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) - \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty} u_{n,m}\right) - \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} u_{n,m}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |u_{n,m}|\right) + \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_{n,m}|\right) \\
&= \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} |u_{n,m}|\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{N} |u_{n,m}|\right) \\
&\leq \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right).
\end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0, étant le reste d'une série convergente. □

On va maintenant énoncer une propriété du *produit de Cauchy*, ou *produit de convolution* de deux séries, défini de la manière suivante.

Définition 1.4.3. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites. On définit leur produit de Cauchy* (w_n) *par la formule*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Le produit de Cauchy est commutatif, puisqu'un changement de variable $q = n - k$ dans la somme précédente donne

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = w_n = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q.$$

Le produit de Cauchy se comporte bien vis à vis des séries absolument convergentes.

Propriété 1.4.4. *Si les séries à termes complexes* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont absolument convergentes, alors il en est de même de la série* $\sum w_n$*, où* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$*. De plus on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| = \sum_{n=0}^{N} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|.$$

On peut intervertir les deux sommes en écrivant

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N} \sum_{k=n}^{N} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{N-k} |u_k||v_q|,$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $q = n - k$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} |u_k||v_q| &= \left(\sum_{k=0}^{N} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{N} |v_q|\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la série $\sum w_n$ est absolument convergente, les sommes partielles des modules étant bornées. Pour montrer que la somme du produit de Cauchy vaut le produit des sommes, on écrit

$$\left|\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right|.$$

En intervertissant les sommes et en faisant le changement de variables $q = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{n=k}^{2N} u_k v_{n-k} - \sum_{k=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} u_k v_q\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u_k v_q\right|.
\end{aligned}$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u_k v_q\right| &= \left|\sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{2N-q} u_k v_q\right| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{2N-q} |u_k||v_q| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{\infty} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{\infty} |u_k||v_q| \\
&= \left(\sum_{k=N+1}^{2N} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right) + \left(\sum_{q=N+1}^{2N} |v_q|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\right).
\end{aligned}$$

Les restes d'une série convergente tendent vers zéro, par conséquent le membre de droite tend vers 0, ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 2

Fonctions de la variable réelle

2.1 Structure de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ hérite de nombreuses propriétés de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, en évaluant les fonctions en chaque point de l'ensemble de départ.

En effet, on peut définir les opérations et relations suivantes pour des fonctions f et g de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$:

- La somme de deux fonctions est définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout x de I ;
- Le produit d'une fonction par un scalaire est défini par $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$;
- Le produit de deux fonctions est défini par $(f.g)(x) = f(x)g(x)$;
- Si la fonction f ne s'annule pas, son inverse est défini par $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$;
- Le maximum de deux fonctions est défini par $\max(f,g)(x) = \max(f(x),g(x))$;
- Le minimum de deux fonctions est défini par $\min(f,g)(x) = \min(f(x),g(x))$.

L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ hérite donc de $\mathbb{R}$ une addition, une multiplication et une structure d'ordre. Les deux premières prorpiétés montrent que l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et la troisième montre qu'il s'agit également d'une $\mathbb{R}$-algèbre. On retiendra les écritures suivantes qui désignent des maximums et minimums de fonctions :

$$f^+ = \max(f,0),\ \ f^- = -\min(f,0) = \max(-f,0),\ \ |f| = f^+ + f^- = \max(f,-f).$$

Si f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si g est un fonction définie sur l'ensemble (appelé *image* de f)

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\},$$

alors on peut définir la fonction *composée* de f et g, notée $g \circ f$, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On peut effectivement appliquer la fonction g à $f(x)$ car $f(x)$ est dans $f(I)$, qui est inclus dans l'ensemble de définition de g.

Un sous-ensemble important de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées, noté $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. Autrement dit

$$\mathcal{B}(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \mid \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M\}.$$

Le sous-ensemble $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Par conséquent, l'expression

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

a bien un sens pour une fonction de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. Il se touve qu'en réalité cette expression définit une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$.

Propriété 2.1.1. *L'ensemble $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La quantité $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ et en fait un espace de Banach.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur cet espace se vérifie par l'inégalité triangulaire :

$$\|\lambda f + \mu g\|_\infty = \sup_{x\in I} |\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq \lambda \sup_{x\in I} |f(x)| + \mu \sup_{x\in I} |g(x)| = \lambda\|f\|_\infty + \mu\|g\|_\infty,$$

ce qui montre à la fois que $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire (et qu'il s'agit donc d'un sous-espace-vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$) et que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire. Il est clair que $\|f\|_\infty$ ne peut s'annuler que si f est la fonction nulle, et l'égalité $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ est également claire. $\|\cdot\|_\infty$ est donc une norme.

Il nous reste maintenant à montrer que l'espace est complet. Pour cela, on considère dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ une suite de Cauchy (f_n) pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. La quantité $\|f_m - f_p\|_\infty$ tend donc vers 0 lorsque m et p tendent vers l'infini. Or, pour tout x de I, on a (par définition) $|f_m(x) - f_p(x)| \leq \|f_m - f_p\|_\infty$. Pour tout x, la suite $(f_n(x))$ est donc une suite de Cauchy, qui converge en conséquence vers une limite (on est dans $\mathbb{R}$), notée $f(x)$. On définit de cette manière une fonction f de I dans $\mathbb{R}$. Pour achever la démonstration, il reste à montrer, d'une part, que cette fonction est dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$, et d'autre part qu'on a bien la convergence $f_n \to f$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (on a seulement pour l'instant une convergence simple).

Pour vérifier que f est bornée, remarquons que pour tout x de I on a $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$. La suite (f_n) étant de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée. Par conséquent, $|f(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ pour tout x de M, et la fonction f est donc bornée.

Montrons maintenant que la quantité $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0. Pour un x de I, on a

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty.$$

On a donc $\|f - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f_n\|_\infty$, et comme cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n et m tendent vers l'infini, la suite (f_n) tend bien vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

Toutes les propriétés qui viennent d'être énoncées restent vraies si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, à l'exception de la définition du maximum de deux fonctions, en raison de l'absence de relation d'ordre "naturelle" sur $\mathbb{C}$.

2.2 Étude locale des fonctions

On va utiliser la terminologie suivante, qui sera utile par la suite.

Définition 2.2.1. *Un* voisinage *d'un réel a est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non-trivial centré en a, c'est à dire un intervalle de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Par exemple, les ensembles $]-1,\infty[$, $\mathbb{R}$, ou $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n-1/3, n+1/3]$ sont des voisinages de 0. En revanche, les ensemble $[0,1]$, $[0,\infty[$ ou $\mathbb{Q}$ n'en sont pas.

Définition 2.2.2. *On dit qu'une fonction réelle f définie sur un voisinage I d'un point a* a pour limite *en a* la valeur *l si pour toute réel positif ε on peut trouver une valeur $\eta > 0$ telle que si x est dans $]a-\eta, a+\eta[$, alors $|f(x)-l| \leq \varepsilon$. Avec les quantificateurs, cette définition se récrit*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon).$$

Si la fonction f admet l comme limite au point a, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,\ \text{ou encore } f(x) \underset{x\to a}{\to} l.$$

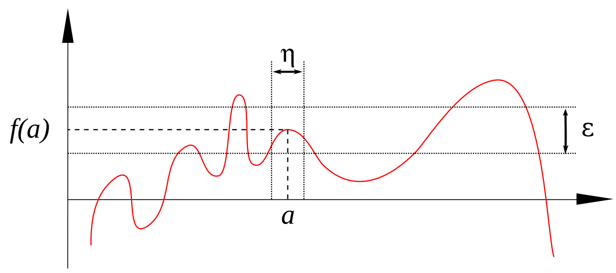

FIGURE 2.1 – Continuité d'une fonction.

On peut également parler des limites à gauche et à droite d'une fonction.

Définition 2.2.3. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a* admet l comme limite à gauche *en a si pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel η tel que si x est dans l'intervalle $]a-\eta, a[$, alors $|f(x)-l| \leq \varepsilon$.*
On peut définir de même la notion de limite à droite*.*
Si f admet l comme limite à gauche (resp. à droite) en a, on note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x\overset{<}{\to} a} f(x) = l \text{ (resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x\overset{>}{\to} a} f(x) = l).$$

L'opération de passage à la limite peut être manipulée en utilisant les propriétés suivantes :

Propriété 2.2.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout $x \neq a$ dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \leq g(x).$$

Si les deux fonctions admettent une limite en a, alors ces limites vérifient

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

La même inégalité est vraie pour les limites à gauche ou à droite.

Démonstration. On va montrer la contraposée : supposons que l'on ait l'inégalité stricte

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x).$$

Pour simplifier, on note $l_f = \lim_{x\to a} f(x)$ et $l_g = \lim_{x\to a} g(x)$. On pose $\varepsilon = (l_f - l_g)/2 > 0$. Soit η tel que pour x dans $]a-\eta, a+\eta[$ on ait $|f(x) - l_f| \le \varepsilon$ et $|g(x) - l_g| \le \varepsilon$ [1]. Alors, pour x dans $]a-\eta, a+\eta[$, on a

$$f(x) > l_f - \varepsilon = (l_f + l_g)/2 = l_g + \varepsilon > g(x).$$

La propriété est démontrée. □

Il est important de noter que l'on *ne peut pas* conclure à une inégalité stricte entre les limites si on a seulement inégalité stricte entre les fonctions.

Propriété 2.2.5 ("Théorème des gendarmes")**.** *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout x dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Si f et h ont une limite en a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, *alors g admet également une limite en a et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Démonstration. Soit ε un réel positif. Notons $l = f(a) = h(a)$ la limite commune en a des deux fonctions f et h. On considère η tel que si $|x-a| \le \eta$ on ait $|f(x) - l| \le \varepsilon$ et $|h(x) - l| \le \varepsilon$.

Si $|x - a| \le \eta$, on a alors

$$l - \varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le l + \varepsilon,$$

soit encore $|g(x) - l| \le \varepsilon$. La fonction g a donc une limite en a, égale aux limites de f et h. □

Définition 2.2.6. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a* est continue en a *si elle admet une limite en a.*
Si la fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue en tout point a de I, on dit qu'elle est continue sur I, *ou tout simplement qu'elle est* continue.

Si f admet une limite à gauche en a et que $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, *on dit que f est* continue à gauche en a. *On définit de même la continuité à droite.*

On peut exprimer la continuité à partir des limites à gauche et à droite :

Propriété 2.2.7. *Une fonction f définie sur un voisinage de a est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

1. On peut choisir le *même* η pour f et g de la manière suivante : on sait qu'il existe des nombres η_f et η_g qui satisfont la propriété respectivement pour f et g. On vérifie alors que $\eta = \min(\eta_f, \eta_g)$ convient pour les deux fonctions.

On peut caractériser la continuité de la manière suivante :

Propriété 2.2.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage d'un point a.*
- *La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) tendant vers a (et qui prendra donc ses valeurs dans tout voisinage de a à partir d'un certain rang), la suite $(f(u_n)$ tend vers $f(a)$.*
- *On peut également caractériser de cette manière la continuité à gauche (resp. à droite.) en se limitant aux suites prenant des valeurs strictement inférieures (resp. supérieures) à a.*

Démonstration. Supposons la fonction f continue en a, et soit (u_n) une suite convergeant vers a. Soit ε un réel positif. Par continuité de f en a, il existe un réel η tel que si $|x-a| \leq \eta$, alors $|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$. Mais par convergence de (u_n) vers a, il existe un indice n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|u_n - a| \leq \eta$. En conséquence, si $n \geq n_0$, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Montrons l'implication inverse. Pour cela, nous allons passer par la contraposée. Supposons que la fonction f n'est pas continue. Par conséquent, il existe un réel ε tel que pour tout η, il existe un x_η dans $]a-\eta, a+\eta[$ tel que $|f(a) - f(x_\eta)| \geq \varepsilon$. La suite $(x_{1/n})$ converge vers a (puisque $|x_{1/n} - a| \leq \frac{1}{n}$) sans que $(f(x_{1/n}))$ ne converge vers $f(a)$ (puisque $|f(a) - f(x_{1/n})| \geq \varepsilon$). □

Propriété 2.2.9. *Soient f et g deux fonction continues en un point a. On a les propriétés suivantes :*
- *pour tout réel λ, la fonction λf est continue en a ;*
- *la fonction $f+g$ est continue en a ;*
- *la fonction fg est continue en a ;*
- *si $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisnage de a. La fonction $\frac{f}{g}$ est alors bien définie sur un voisinage de a et est continue en a.*

Autrement dit, l'ensemble des fonction continues en un point a constitue une *algèbre*.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Propriété 2.2.10. *Soient f et g deux fonctions telles que f soit définie sur un voisinage I de a et continue en a, et que g soit définie sur $f(I)$ et continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. On note pour simplifer $l_g = \lim_{y \to f(a)} g(y)$ et $l_f = \lim_{x \to a} f(x)$.

Soit ε un réel strictement positif. Par continuité de g en $f(a)$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que si y est dans $|f(a) - x| \leq \eta$, alors $|g(y) - l_g| \leq \varepsilon$. Mais alors, par continuité de f en a, on peut trouver un réel strictement positif ζ tel que si $|x-a| \leq \zeta$, alors $|f(x) - l_f| \leq \eta$. Par conséquent, si $|x-a| \leq \zeta$, alors $|g(f(x)) - l_g| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $g \circ f$ admettait l_g comme limite en a. □

2.3 Fonctions continues sur un intervalle

Le théorème suivant est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle.

Théorème 2.3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.*

Autre formulation :

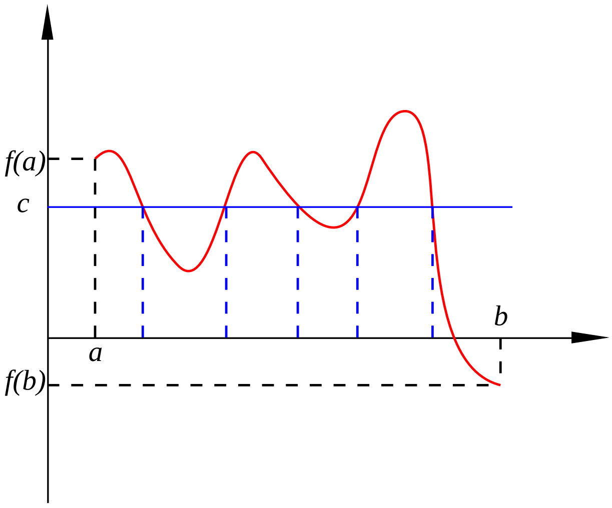

FIGURE 2.2 – Le théorème des valeurs intermédiaires. Aux pointillés bleus, les valeurs possibles de x.

Théorème 2.3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires 2)**.** *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si c est tel que $f(a) < c < f(b)$, alors il existe x dans $[a,b]$ tel que $f(x) = c$.*

Il est important de comprendre que ce résultat *n'est pas* évident. Il faut bien voir qu'il est entièrement basé sur la *complétude* de $\mathbb{R}$; pour s'en convaincre, on peut méditer sur l'exemple de la fonction de $\mathbb{Q}$ dans lui-même qui à x associe $x^2 - 2$. Cette fonction continue prend une valeur négative en 0 et positive en 2, mais ne s'annule jamais (car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel).

Une preuve du théorème des valeurs intermédiaires fera donc appel d'une manière ou d'une autre à la complétude de $\mathbb{R}$, que ce soit sous la forme de suites de Cauchy, de la propriété de la borne supérieure, de la propriété des segments emboîtés, etc.

Démonstration. On montre la deuxième formulation du théorème. On pose $A_c = \{x \in [a,b], f(x) \leq c\}$. L'ensemble A_c est borné (car contenu dans $[a,c]$). On peut donc définir $x_0 = \sup A_c$. On va montrer que $f(x_0) = c$. Tout d'abord remarquons que par continuité on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < c$ pour x dans $[a, a+\varepsilon]$ et que $f(x) > c$ pour x dans $[b-\varepsilon, b]$. Par conséquent, x_0 est un élément de $]a,b[$. Ensuite, on remarque que $f(x) > 0$ sur $]x_0, c]$. Par continuité, on obtient $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq c$. D'autre part, comme x_0 est la borne supérieure de A_c, il existe une suite (y_n) d'éléments de A_c qui converge vers x_0. Or $f(y_n) \leq c$, d'où $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq c$. On déduit que $f(x_0) = c$. □

Propriété 2.3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe y et z dans $[a,b]$ tels que*

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,b].$$

Démonstration. Ce résultat est basé sur la compacité de l'intervalle $[a,b]$. Il faudra donc a un moment de la preuve utiliser cette propriété, par exemple avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On pose $M = \sup f([a,b])$ (qui peut être infini), et on choisit une suite (x_n) telle que $(f(x_n))$ converge vers M. On extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente dont on note z la limite. Par continuité de

f, la suite $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(l)$, d'où $M = f(z)$. On a montré que la fonction atteint sa borne supérieure, et l'atteinte de la borne inférieure se fait de manière symétrique. □

Définition 2.3.4. *Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si pour tout ε positif il existe un réel η tel que si $|x-y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.*

Cette définition signifie intuitivement que la fonction f est "partout continue de la même manière". Il est intéressant de comparer cette définition avec celle de continuité au niveau des quantificateurs. La continuité sur I s'exprime par l'expression

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

En revanche, l'uniforme continuité s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit, dans le cas de la continuité simple, η peut dépendre de x, alors que pour l'uniforme continuité η doit être le même pour tout x. On voit notamment que :

Propriété 2.3.5. *Une fonction uniformément continue est continue.*

La réciproque de cette propriété est bien entendu fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ (en effet les points n et $n+1/n$ vérifient $|n-(n+1/n)| = 1/n \to 0$, alors que $|f(n)-f(n+1/n)| = |n^2 - (n^2 + 2 + 1/n^2)| > 2$).

Théorème 2.3.6 (Théorème de Heine)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. On va montrer la contraposée. La proposition "f n'est pas uniformément continue sur I" s'écrit avec les quatificateurs

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ \exists y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \text{ et } |f(x_\eta) - f(y_\eta)| > \varepsilon).$$

Choisissons un tel ε. On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass on en extrait des suites convergentes $(x_{\phi(n)})$ et $(y_{\phi(n)})$ (on est sur le segment $[a,b]$) [2]. Comme on a $\left|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right| \leq \frac{1}{\phi(n)}$, les deux suites ont la même limite l. Comme $|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| > \varepsilon$, la fonction f n'est pas continue. □

On a encore une propriété plus forte :

Définition 2.3.7. *On dit qu'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est* Lipshitzienne *si il existe une constante k telle que pour x et y dans I, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Propriété 2.3.8. *Un fonction Lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Pour ε donné, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/k$. □

La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (en effet, les points 0 et $1/n$ vérifient $\left|\sqrt{1/n} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{1/n} \geq \sqrt{n}|1/n - 0|$).

2. On peut prendre la même fonction extractrice ϕ pour (x_n) et (y_n) en extrayant d'abord une sous-suite convergente $(x_{\phi_0(n)})$ de (x_n) puis en extrayant une sous-suite convergente $(y_{\phi_0(\phi_1(n))})$ de $(y_{\phi_0(n)})$. On pose alors $\phi = \phi_0 \circ \phi_1$.

2.4 Dérivation

Définition 2.4.1. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a est* dérivable en a *si la quantité* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, *appelée* taux d'accroissement *converge vers une limite quand h tend vers* 0*. La limite du taux d'accroissement est notée $f'(a)$ et appelée* dérivée de f au point a.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert est dérivable *si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir sur I la fonction f' appelée* dérivée *de f.*

Au vu de cette définition, dire qu'une fonction est dérivable en un point a revient à dire que cette fonction est proche d'une fonction affine au voisinage de a. Plus précisément f est proche de la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$$

(voir la deuxième remarque après le corollaire 2.6.7).

Pour être dérivable, une fonction doit forcément être continue.

Propriété 2.4.2. *Si f est une fonction définie au voisinage d'un point a et est dérivable au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. Si f est dérivable en a, on a

$$|f(a+h) - f(a)| = h\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|.$$

Or $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|$ converge (vers $|f'(a)|$) quand h tend vers 0 donc reste borné, de sorte que

$$|(a+h) - f(a)| \leq Ch \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

□

En revanche on peut trouver des fonctions continues mais non dérivables :

Propriété 2.4.3. *Si a et b son deux réels vérifiant $|a| < 1$ et $|ab| > 1$, alors la fonction définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.

Cette propriété se comprend bien en remarquant que la série $\sum a^n$ converge, alors que la série $\sum (ab)^n$ diverge (ceci ne constitue bien entendu pas une preuve complète !). Sur la figure 2.3, on a représenté la fonction f pour les valeurs $a = 0.5$ et $b = 4$.

Démonstration. Admis. □

La dérivabilité est stable par les opérations suivantes :

Propriété 2.4.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a.*

- *La fonction $f+g$ est dérivable au point a et on a $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
- *La fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;*

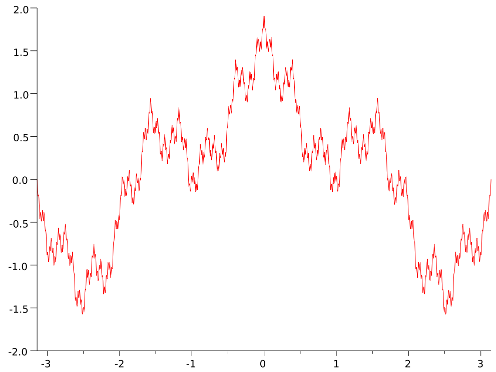

FIGURE 2.3 – Un exemple de fonction continue mais dérivable en aucun point.

- *La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$;*
- *Si $f(a)$ est non nul, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.*

Démonstration. Les propriétés de linéarité viennent des propriétés équivalentes pour les limites.

Pour le produit, on écrit

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Les quantités $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $g(a+h)$, $f(a)$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ convergent respectivement vers $f'(a)$, $g(a)$, $f(a)$ et $g'(a)$, et on sait que l'on peut passer à la limite dans un produit.

Pour l'inverse d'une fonction, on écrit (comme f est continue, on a $f(a+h) \neq 0$ pour h assez petit)

$$\frac{\frac{1}{f}(a+h) - \frac{1}{f}(a)}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)},$$

qui converge bien vers la limite voulue. □

Par récurrence, en appliquant plusieurs fois la formule $(fg)' = f'g + fg'$, on obtient la formule suivante :

Propriété 2.4.5 (Formule de Leibniz)**.** *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a, on a*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a).$$

On peut aussi composer les fonctions dérivables :

Propriété 2.4.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point a et g une fonction définie sur $f(I)$ et dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en g et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soit h un réel positif. On a

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}=\frac{g(f(a)+hf'(a)+h\tau_h)-g(f(a))}{h},$$

où l'on a posé $\tau_h=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En conséquence,

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}=\frac{g(f(a)+hf'(a)+h\tau_h)-g(f(a))}{(f'(a)+\tau_h)h}(f'(a)+\tau_h),$$

qui tend bien vers $g'(f(a))f'(a)$ quand h tend vers 0. □

Propriété 2.4.7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. Si a est un extremum local pour la fonction f, alors $f'(a)=0$.*

On rappelle que si il existe un voisinage I d'un point a tel que $f(x)\leq f(a)$ pour tout x dans I, on dit que a est un *maximum local* de f (ou que f admet un maximum local en a), si $f(a)\leq f(x)$ pour x dans I on dit que a est un *minimum local*, et que si a est un minimum local ou un maximum local, on dit que a est un *extremum local*.

Sur la figure 2.4, on voit que la fonction a une dérivée nulle en ses extrema a_i, sauf en a_1 et a_7, situés aux bornes de l'intervalle de définition, puisque la fontion n'est pas définie sur un *voisinage* de ces points.

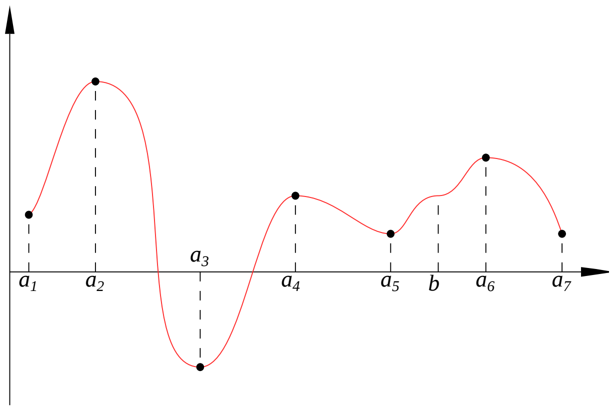

FIGURE 2.4 – Extrema d'une fonction. Les points a_i sont des extrema de la fonction représentée.

Démonstration. On peut supposer (quitte à changer f en $-f$) que a est un maximum local pour f. On a donc, pour h assez petit $f(a+h)\leq f(a)$. En conséquence,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0 \text{ et } f'(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0.$$

En conséquence, on a bien $f'(a)=0$. □

Il est important de remarque que l'on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f atteigne un minimum en a. L'exemple le plus classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui a une dérivée nulle en 0. C'est également le cas de la fonction représentée en figure 2.4 au point b.

Théorème 2.4.8 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le résultat est évident si la fonction f est constante égale à $f(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$, car la dérivée de f est alors nulle en tout point de $]a, b[$.

On peut donc supposer que f est non constante, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur strictement supérieure à $f(a)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point c, qui est distinct de a et b (puisque la fonction atteint une valeur strictement supérieure à $f(a) = f(b)$). Par la propriété 2.4.7, on déduit que $f'(c) = 0$. □

Théorème 2.4.9 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe un élément c de $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Si la dérivée de f est bornée, on déduit notament de cette formule l'*inégalité *des accroissements finis :*

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Ce théorème se comprend très bien par un exemple de la vie courante : si vous vous déplacer en voiture sur l'autoroute en respectant la limite de 130km/h, en une heure vous vous trouverez nécéssairement à moins de 130 kilomètres de votre point de départ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La fonction g est dérivable sur $]a, b[$ (comme somme de f et d'un polynôme) et vérifie $g(a) = 0$, $g(b) = 0$. Le théorème de Rolle nous permet de conclure qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Propriété 2.4.10. *Soit f une fonction dérivable définie sur un* intervalle ouvert*. Alors :*

- *f est croissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \geq 0$ pour tout x ;*
- *f est décroissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \leq 0$ pour tout x ;*
- *f est constante si et seulement si elle vérifie $f'(x) = 0$ pour tout x.*

Démonstration. Supposons que f est croissante. Si $h > 0$ alors, $f(x+h)-f(x) \geq 0$, d'où $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. De même, si $h < 0$, on a $f(x+h) - f(x) \leq 0$, de sorte $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. En passant à la limite $h \to 0$, on trouve donc $f'(x) \geq 0$. De même, on montre qu'une fonction décroissante a une dérivée négative. Par conséquent, une fonction constante, qui est croissante et décroissante, a une dérivée à la fois positive et négative. Par conséquent sa dérivée est nulle.

Inversement, soit f une fonction ayant une dérivée positive sur l'intervalle $]a, b[$, et soient $\alpha < \beta$ deux points de $]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, on peut trouver c dans $]a, b[$ tel que

$f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha) \geq 0$ (puisque f' est uniformément nulle). Par conséquent, $f(\alpha) \leq f(\beta)$, ce qui montre que f est croissante. De même on montre qu'une fonction à dérivée négative est décroissante et par conséquent, qu'une fonction à dérivée nulle (c'est à dire à la fois positive et négative) est à la fois croissante et décroissante, et donc constante. □

Cette propriété n'est vraie que si f est définie sur un intervalle, comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases},$$

qui a une dérivée nulle sans être constante. Autre exemple : la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ qui a x associe $1/x$ a une dérivée strictement négative en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire 2.4.11. *Si f et g sont deux fonctions dérivables définies sur un même* intervalle *I et telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout x de I, alors elles ne diffèrent que par une constante :*

$$f = g + f(a) - g(a),$$

pour tout a de I.

Démonstration. La fonction $f - g$ a une dérivée uniformément nulle, elle est donc constante. □

2.5 Comportement asymptotique des fonctions

2.5.1 Relations de comparaison

Les trois notions suivantes permettent de comparer la taille relative de plusieurs fonctions en un point donné.

Définition 2.5.1. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*

- *On dit que f est dominée par g au voisinage de a si il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout x dans un voisinage de a.*
- *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si il existe une fonction ε définie au voisinage de a dont la limite en a vaut 0 et telle que $|f(x)| \leq |\varepsilon(x)g(x)|$.*
- *On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g$ est négligeable devant g.*

Les notations suivantes (appelées *notations de Landau*) peuvent s'avérer très puissante si l'on sait les manier correctement. Il y a notamment quelques pièges à éviter.

Définition 2.5.2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*

- *Si f est négligeable devant g au point a, on notera $f(x) = o_a(g(x))$ ou "$f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a" ou même $f(x) = o(g(x))$ tout court si il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a.*
- *Si f est dominée par g au point a, on notera $f(x) = O_a(g(x))$ ou $f(x) = O(g(x))$.*
- *Si f est équivalent à g au point a, on notera $f(x) \sim_a g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$.*

On notera bien que le signe “=” devant les $O(\ldots)$ et $o(\ldots)$ ne désigne *pas* une égalité ! Notamment en 0 on a bien $o(x^2) = o(x)$ alors que $o(x) = o(x^2)$ est faux. En toute rigueur, il faudrait plutôt écrire $f(x) \in o(g(x))$, où l'on noterait $o(g(x))$ l'*ensemble* des fonctions négligeables devant g. L'exemple précédent reviendrait alors à dire que $o(x^2) \subset o(x)$ alors que $o(x) \not\subset o(x^2)$. On voit bien que les deux fonctions ne jouent pas un rôle symétrique.

L'autre danger de ces notation est qu'il ne faut pas utiliser le signe $\sim$ comme une égalité, même si on a équivalence entre $f \sim g$ et $g \sim f$. Notamment, *il faut se garder d'ajouter des équivalents.* Par exemple, on a les équivalences en 0

$$\sin(x) \sim x \text{ et } \tan(x) \sim x,$$

sans toutefois avoir $\sin(x) - \tan(x) \sim 0$. En réalité, on trouve

$$\sin(x) - \tan(x) \sim -\frac{x^3}{2}.$$

Notamment, on évitera d'utiliser la notation $f(x) \sim_a 0$, qui signifie que f est nulle sur un voisinage de a.

On pourra aussi méditer sur un exemple comme $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, qui est vrai, mais $\cos(x) \sim 1 + 12x^{42}$ est tout aussi vrai.

Propriété 2.5.3. *Pour une fonction g définie sur un voisinage V de a telle que $g(x) \neq 0$ pour x dans $V \setminus \{a\}$, on a équivalence entre $f(x) \sim g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Démonstration. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour une certaine fonction tendant vers 0 qund x tend vers a. Pour $x \neq a$, on peut alors diviser cette égalité par $g(x)$ pour obtenir

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \varepsilon(x),$$

ce qui montre bien que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 pour x tendant vers a.

Inversement, si l'on suppose que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1, alors en posant $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$, on a bien $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x))$ pour x tendant vers 0 quand x tend vers a. $\square$

2.5.2 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a admet au un développement limité à l'ordre n en a si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n).$$

En pratique on préferera se ramener, par le changement de variables $x = a + h$ à l'écriture

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o_0(h^n),$$

qui permet de ne considérer que des développements limités en 0.

Propriété 2.5.4. *Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 telle que f' soit continue et admette un développement limité à l'ordre n en 0 donné par*

$$f'(x) = P_n(x) + o(x^n).$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$, donné par

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y)\,dy + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, on peut intégrer un développement limité.

Démonstration. On écrit $f'(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$, où ε est une fonction tendant vers 0 en 0. En intégrant entre 0 et x, on trouve

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y)\mathrm{d}y + \int_0^x y^n\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

(l'intégrale a bien un sens, puisque $x^n\varepsilon(x) = -P_n(x) + f'(x)$ est continue). Il reste alors simplement à écrire

$$\left|\int_0^x y^n\varepsilon(y)\mathrm{d}y\right| \leq \sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)| \int_0^x y^n\mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}\sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)| x^{n+1}.$$

La fonction $x \mapsto \sup_{y\in[-x,x]} |\varepsilon(y)|$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. □

Propriété 2.5.5. *Soit g une fonction admettant un développement limité en un point a à l'ordre n*

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre m en α_0

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1(x-\alpha_0) + \ldots + \beta_m(x-\alpha_0)^m + o((x-\alpha_0)^m)$$

alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $\min(n,m)$ *en a, obtenu en composant les développements limités de f et g*

$$\begin{aligned} f\circ g(x) =& \beta_0 + \beta_1(\alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_m(x-a)^m) + \ldots \\ &+ \beta_n(\alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_m(x-a)^m)^n \\ &+ o((x-a)^{\min(m,n)}), \end{aligned}$$

en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à $\min(n,m)$.

Démonstration. On écrit les termes négligeables explicitement sous la forme $(x-a)^n\varepsilon_1(x-a)$ et $(x-\alpha_0)^m\varepsilon_2(x-\alpha_0)$, où $\varepsilon_1(y)$ et $\varepsilon_2(y)$ tendent vers 0 lorsque y tend vers 0. On remplace ensuite le développement de $g(x)$ dans celui de $f(x)$ et on développe. □

2.6 Développement en série

Définition 2.6.1. *Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable et si sa dérivée est continue. De même on définit par récurrence les fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ comme les fonctions dont la dérivée est de classe $\mathcal{C}^k$. On définit également les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme les fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k.*

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Définition 2.6.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point a. On dit que f est n fois dérivavble au point a si elle est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.*

Si f est n fois dérivable en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est n fois dérivable sur I.

L'ensemble des fonctions de classe k fois dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est parfois noté $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$.

Propriété 2.6.3. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Démonstration. Cela se déduit des propriétés de dérivabilité d'un produit ou d'une combinaison linéaire. □

On veut approcher une fonction f par un polynôme. Un manière naturelle de faire au voisinage d'un point a est d'approcher $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ qui est l'unique polynôme de degré inférieur à n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n en a sont les mêmes que celles de f [3].

Théorème 2.6.4 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage du point a, alors on a, pour tout h suffisament petit, le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Le reste intégral peut aussi s'écrire, après le changement de variables $x = a + th$ comme

$$\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\mathrm{d}t.$$

On remarquera que dans le cas $n = 1$, la formule de Taylor avec reste intégral est simplement la formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ exprimant une fonction $\mathcal{C}^1$ comme l'intégrale de sa dérivée.

Démonstration. C'est une récurrence sur n utilisant la formule d'intégration par parties. Pour $n = 0$, l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^h f'(x)\mathrm{d}x$$

exprime simplement la fonction comme l'intégrale de sa dérivée. En supposant vraie l'égalité au rang n, on montre l'égalité au rang $n+1$ en intégrant par parties ($f^{(n+1)}$ se dérive en $f^{(n+2)}$ et $\frac{1}{n!}(a+h-x)^n$

3. On se rappellera que l'ensemble des polynôme de degré inférieur à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$ et que $(1, X, \ldots, \frac{X^n}{n!})$ en est une base dont la base duale $(\delta_a^{(k)})$ est définie par $\delta_a^{(k)}(P) = P^{(k)}(a)$.

se primitive en $-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1})$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x =& \left[-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+1)}(x)\right]_a^{a+h} \\ &+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x \\ =&0+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a) \\ &+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

On peut affaiblir l'hypothèse "f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$" quitte à avoir une expression moins précise du reste.

Théorème 2.6.5 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Si f est une fonction définie sur un voisinage de a telle que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ soit dérivable, alors on a pour tout h assez petit*

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2f''(a)}{2}+\ldots+\frac{h^nf^{(n)}(a)}{n!}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\alpha h),$$

pour un certain α de $[0,1]$. Notamment, si $f^{(n+1)}$ est bornée, on en déduit la majoration de l'erreur :

$$\left|f(a+h)-\left(f(a)+hf'(a)+\frac{h^2f''(a)}{2}+\ldots+\frac{h^nf^{(n)}(a)}{n!}\right)\right|\leq\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leq\alpha\leq1}\left|f^{(n+1)}(x+\alpha h)\right|.$$

On remarquera que le cas $n=0$ est exactement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. On pose

$$\phi(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^kh^kf^{(k)}(a+th)}{k!}-\lambda(1-t)^{n+1}.$$

On vérifie alors que ϕ est dérivable, puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est dérivable. On a $\phi(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^kf^{(k)}(a)}{k!}-\lambda$ et $\phi(1)=f(a+h)$. Le choix

$$\lambda=f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^kf^{(k)}(a)}{k!}$$

permet donc d'avoir $\phi(0)=\phi(1)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction ϕ. Il existe donc un α dans $[0,1]$ tel que

$$\phi'(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^nh^{n+1}f^{(n+1)}(a+\alpha h)}{n!}-(n+1)\lambda(1-\alpha)^n=0,$$

et la définition de λ permet de conclure. □

On peut également se passer de l'hypothèse selon laquelle $f^{(n)}$ est dérivable en cherchant une expression encore moins fine du reste.

Théorème 2.6.6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ telle que f^{n-1} soit dérivable, alors on a le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Le cas $n = 0$ est simplement la définition de la continuité de f en a, et le cas $n = 1$ est la définition de la dérivabilité de f en a.

Démonstration. On le montre par récurrence.

Le cas $n = 1$ correspond à la définition de la dérivabilité de f en a.

Supposons la propriété vraie au rang n. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(n)}$ dérvable, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et sa dérivée $n-1^{\text{ème}}$ est dérivable, on peut donc lui appliquer la propriété, de sorte que

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2 f'''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Il suffit ensuite d'intégrer ce développement limité en vertu de la propriété 2.5.4. □

Il est important de remarquer que dans chacun de ces trois cas, les hypothèses sont les hypothèses "minimales" pour écrire la formule. À chaque fois on suppose un cran de régularité en moins, et la conclusion est légèrement plus faible.

Corollaire 2.6.7. *Une fonction n fois dérivable en un point a admet un développement limité à l'ordre n au point a.*

Quelques remarques :

- La réciproque de ce théorème est *fausse* ! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une fonction f continue mais non dérivable, vérifiant $f(0) = 0$. On pose ensuite $f_n(x) = x^n f(x)$. Comme f est continue en 0, on a par définition $f_n(x) = o(x^n)$ en 0. Cependant la fonction f_n n'est dérivable qu'au point $x = 0$.
- Toutefois une partie de la réciproque pour $n = 1$ est vraie. En effet, le développement limité à l'ordre 1, $f(x+h) = f(x) + h\lambda + o(h)$ revient exactement à la définition de la dérivabilité de f en x avec $f'(x) = \lambda$. En fait ce qui empêche de passer à n supérieur à 1 est le fait qu'un développement limité donne de l'information sur la fonction (par exemple si elle est dérivable), mais pas sur ses dérivées (par exemple il n'indique pas que la dérivée est dérivable).

2.6.1 Développement des fonctions usuelles

On peut appliquer la formule de Taylor-Young, ou la propriété 2.5.4, pour trouver les développements limités en 0 des fonctions usuelles.

$$
\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (définition) ;}\\
\cos(x) =& 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \text{ (partie réele de } e^{ix}\text{) ;}\\
\sin(x) =& x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (partie imaginaire de } e^{ix}\text{) ;}\\
\frac{1}{1-x} =& 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (série géométrique) ;}\\
\ln(1+x) =& x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (primitive de } (1+x)^{-1}\text{) ;}\\
\arctan(x) =& x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (primitive de } (1+x^2)^{-1}\text{) ;}\\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (Taylor-Young).}
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Intégration

3.1 Intégration sur un segment

La théorie de l'intégration au programme du concours du CAPES est l'intégrale de Riemann. Nous allons revenir sur la contruction de cette intégrale. La définition de l'intégrale elle-même n'est pas aprogramme, mais il me paraît raisonnable d'en avoir un idée assez concrète.

La notion d'intégrale a pour objectif d'associer au plus grand nombre possible de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ un nombre, noté $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, qui correspondrait à la "taille" de cette fonction. On peut notamment penser à la surface présente sous le graphe de la fonction.

On s'attend à ce que l'intégrale vérifie les propriétés "évidentes" suivantes :
(croissance) Si f et g sont deux fonctions ayant une intégrale et telles que $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(linéarité) Si f et g sont deux fonctions admettant une intégrale et λ et μ deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet une intégrale qui vaut

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(cas des fonctions élémentaires) Une fonction de la forme $\mathbf{1}_{(\alpha,\beta)}$ [1, 2], où $\alpha \leq \beta$ sont des éléments de $[a, b]$, a une intégrale, donnée par

$$\int_a^b \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)} = \beta - \alpha.$$

Nous allons maintenant partir de ces trois propriétés élémentaires pour en déduire une notion d'intégrale pouvant s'appliquer à une classe plus grande de fonctions, contenant notamment toutes les fonctions continues sur $[a, b]$.

1. Les parenthèses désignent des crochets ouverts ou fermés
2. Pour une partie A de $\mathbb{R}$ fonction $\mathbf{1}_A$, appelée *indicatrice* de A est définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Définition 3.1.1. – *On appelle* subdivision *d'un segment* $[a, b]$ *une suite finie*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La quantité $\max_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$ *s'appelle le* pas *de la subdivision.*

– *On dit qu'une fonction* f *définie sur un segment* $[a, b]$ *est* en escalier *si il existe une subdivision* $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ *de* $[a, b]$ *telle que* f *soit constante sur l'intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$.

Une fonction en escalier est donc de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[}(x) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathbf{1}_{\{x_i\}}(x),$$

avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. La propriété de linéarité permet de définir l'intégrale d'une fonction en escalier à partir des intégrales de fonctions élémentaires : en effet, on peut écrire

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_i,x_{i-1}[}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b \mathbf{1}_{]x_i,x_{i-1}[}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}).$$

Noter que les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\{c\}}$ ont une intégrale nulle, on va donc les oublier dans le reste du chapitre.

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On suppose que la fonction f admet une intégrale. Si v et w sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $v \leq f \leq w$, la propriété de croissance nous donne l'inégalité suivante, illustrée sur la figure 3.1

$$\int_a^b v(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b w(x)\mathrm{d}x.$$

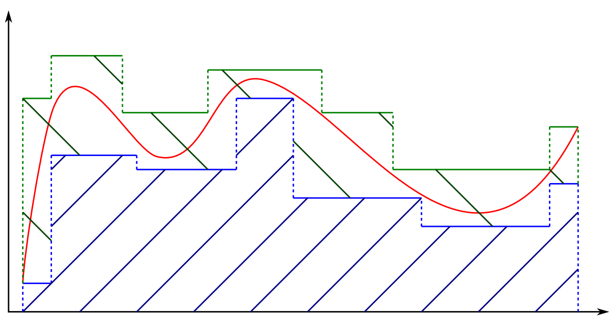

FIGURE 3.1 – Encadrement d'une fonction par des fonctions en escalier. L'aire sous la courbe est encadrée par les deux surfaces hachurées.

En passant à la borne supérieure sur toutes les fonctions v en escalier inférieures à f et à la borne inférieure sur toutes les fonctions w en escalier supérieures à f, on obtient l'encadrement

$$\sup_{v \leq f} \int_a^b v(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x)\mathrm{d}x.$$

On est donc amenés naturellement à la définition suivante :

Définition 3.1.2. *On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est* intégrable *si*

$$\sup_{v \leq f} \int_a^b v(x)\,dx = \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x)\,dx.$$

On définit alors l'intégrale de f comme la valeur

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{v \leq f} \int_a^b v(x)\,dx = \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x)\,dx.$$

Le principe de cette définition est le suivant : on sait intégrer les fonctions en escalier, dont les graphes ne sont que des réunions de rectangles, la propriété de croissance de l'intégrale permet donc d'encadrer l'hypothétique intégrale d'une fonction f par les bornes inférieures et supérieures de la définition 3.1.2. Quand ces deux bornes sont égales, l'intégrale de la fonction, si elle existe, *ne peut pas* valoir autre chose que la valeur commune de ces deux bornes. On *définit* donc l'intégrale de f de cette manière.

On utilise également la convention suivante, de sorte que la relation de Chasles soit vérifiée :

Définition 3.1.3. *Si $b \leq a$ et si f est une fonction intégrable sur $[b, a]$ on* définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Cette convention donne la propriété suivante :

Propriété 3.1.4 (Propriété de Chasles)**.** *Si a, b et c sont trois réels et si f est fonction intégrable définie sur un segment I contenant a, b et c, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Démonstration. Supposons que $a \leq b \leq c$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c \mathbf{1}_{[a,b]}(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c \mathbf{1}_{]b,c]}(x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c (\mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{]b,c]}(x))f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Si $a \leq c \leq b$ on fait un calcul similaire en utilisant la convention de la définition 3.1.3 et en remarquant que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) - \mathbf{1}_{[c,b]}(x) = \mathbf{1}_{[a,c[}(x)$. Les autres cas se traitent de manière similaire. □

Nous allons maintenant voir une manière plus explicite de calculer l'intégrale.

Définition 3.1.5. *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, et $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle* somme de Riemann *associée à la subdivision $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ toute somme de la forme*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

où c_i est un élément de $[x_i, x_{i+1}]$.

On a la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Propriété 3.1.6. *Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées aux subdivisions de $[a, b]$ convergent quand le pas de la subdivision tend vers* 0.

Plus précisément f est intégrable si et seulement la proposition suivante est vraie :

$$\exists\lambda,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall(x_i)_{i=0,\dots,n},\ \left(Pas(x_i)_{i=0,\dots,n} < \eta \Rightarrow \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) - \lambda\right| \leq \varepsilon\right).$$

Le réel λ est alors nécessairement égal à $\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Admis. □

Un cas particulier important en pratique, notamment pour calculer des limites de sommes, est le cas de la subdivision uniforme $(u_i^{[a,b],n})_{i\in\{0,\dots,n\}}$ sur $[a, b]$ définie par

$$u_i^{[a,b],n} = a + \frac{i}{n}(b - a).$$

Le pas de cette subdivision vaut $\frac{(b-a)}{n}$.

Le programme du CAPES se limite à un sous-ensemble des fonctions intégrables plus simple à caractériser, qui contient les fonctions continues. Il s'agit de l'ensemble des fonctions *continues par morceaux*, défini ci-dessous.

Définition 3.1.7. *On dit qu'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ est* continue par morceaux *si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[a, b]$ telle que $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue et admette des limites en x_i^+ et en x_{i+1}^-.*

Propriété 3.1.8. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est intégrable.*

Dans la suite de ce chapitre, on ne considérera que des intégrales de fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux conserve une propriété importante des fonctions continues : elles sont bornées sur les segments.

Propriété 3.1.9. *Une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est bornée.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de $[a, b]$ associée à une fonction continue f. Pour $i = 1, \dots, n$, la fonction f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ et admet des limites finies en x_{i-1} et x_i. Par conséquent, elle se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et est donc bornée sur $]x_{i-1}, x_i[$. On a donc, pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x)| \leq \max\left(\max_{i=1}^{n} \sup_{]x_{i-1},x_i[} |f|\ ,\ \max_{i=0}^{n} |f(x_i)|\right) < \infty.$$

Le maximum de la formule précédente est fini car il n'y a qu'un nombre *fini* de termes dans ce maximum. □

Deux inégalités utiles pour encadrer des intégrales :

Propriété 3.1.10 (Inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, alors on a l'*inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

*ainsi que l'*inégalité de la moyenne

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sup_{[a,b]} |g| \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration. On a, par définition de la valeur absolue, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. La propriété de croissance de l'intégrale nous donne alors

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

ce qui donne la première inégalité.

Pour la deuxième, on remarque que

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq |f(x)| \sup_{[a,b]} |g|$$

et on intègre par rapport à x. $\square$

Propriété 3.1.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

Démonstration. On considère le polynôme de degré 2 suivant :

$$P(X) = \int_a^b (Xf(x) + g(x))^2\mathrm{d}x = \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right) X^2 + 2\left(\int_a^b (x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right) X + \int_a^b (x)|g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

La première expression de P montre qu'il ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et notamment que son discriminant est positif. D'après la deuxième expression, ce discriminant vaut

$$\Delta = 4\left(\int_a^b (x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

On a donc montré l'inégalité. $\square$

On peut également définir l'intégrale de fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, ou même dans un espace vectoriel réel de dimension *finie* quelconque. Il suffit pour cela de travailler coordonnée par coordonnée : on considère une fonction f à valeurs un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie et on écrit $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$ où $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une base de E. On définit alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x\right) e_i \in E,$$

on est donc ramené à des intégrales de fonctions à valeurs réelles. Toutes les résultats ci-dessus sont alors vrais, quitte à remplacer la valeur absolue par une norme sur E.

3.2 Lien entre intégrale et primitive

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet un primitive F si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I.

On a la propriété suivante :

Propriété 3.2.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Soit c un point de $[a, b]$. On pose $F_c(x) = \int_c^x f(y)dy$. On a les résultats suivants :*

1. *la fonction F_c est continue ;*
2. *si f est continue en x, alors F_c est dérivable en x et vérifie $F_c'(x) = f(x)$;*
3. *si f est continue sur $[a, b]$, F_c est de classe $\mathcal{C}^1$ et est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en c. Notamment, pour tout primitive F de f, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration.

1. Comme f est continue par morceaux, elle est bornée par une constante M. On peut alors écrire

$$|F_c(x) - F_c(y)| = \left|\int_x^y f(x)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_x^y |f(x)|\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_x^y M\mathrm{d}x\right| = M|x - y|.$$

   La fonction F_c est donc Lipschitzienne, et par conséquent continue.

2. On va montrer que le taux d'accroissement de F_c en un point x_0 où f est continue tend vers $f(x_0)$. Soit ε un réel positif, et soit η tel que

$$|x - x_0| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

   On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si $|x - x_0| \leq \eta$, pour tout t dans $[x_0, x]$ [3] on a $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Cela montre que F_c est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

3. Si f est continue en tout point de $[a, b]$, alors F_c est, d'après le point précédent, dérivable sur $[a, b]$ et $F_c' = f$ est une fonction continue. L'unicité de la primitive a été vue dans le cours sur les fonctions réelles. L'identité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ se déduit de la propriété de Chasles.

$\square$

Un corollaire important de cette propriété est que toute fonction continue admet une primitive.

On déduit de cette propriété les deux règles de calculs suivantes, très importantes pour le calcul d'intégrales.

Propriété 3.2.2. *Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on a l'égalité*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration. La fonction uv est de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc notamment

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Propriété 3.2.3. *Si ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si f est continue sur $\phi([a, b])$ [4], alors on a*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

Un moyen mnémotechnique simple pour retrouver cette formule est d'imaginer qu'on a posé $y = \phi(x)$, de sorte que $\mathrm{d}y = \phi'(x)\mathrm{d}x$, que $f(y) = f(\phi(x))$ et que si x varie de a à b, alors y varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f (une telle fonction existe, puisque f est continue). On a alors, puisque $(F \circ \phi)'(x) = F(\phi(x))\phi'(x)$,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Dans la plupart des cas, les changements de variables utilisés sont bijectifs : ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $[\phi(a), \phi(b)]$ [5] et on peut alors écrire la formule de changement de variables sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

3. ou $[x, x_0]$ suivant les cas.
4. Qui est un segment.
5. ou $[\phi(b), \phi(a)]$.

3.3 Intégration sur un intervalle quelconque

On peut légitimement se poser la question de définir l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle quelconque plutôt que de se limiter à des segment. Sur un intervalle ouvert (dont une des bornes peut désormais valoir $\pm\infty$) on peut observer différents problèmes qui ne se posaient pas sur un segment. En effet, la défintion naturelle de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque I (qui généralise notamment les fonctions continues) est la suivante, pour laquelle une fonction continue par morceaux peut très bien tendre vers $\pm\infty$ à une des bornes.

Définition 3.3.1. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I (non nécessairement fermé) est* continue par morceaux *si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.*

Ainsi, on se convaincra sans peine qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle ne peut pas nécessairement être encadrée par des fonctions en escalier intégrables, de sorte que la définition 3.1.2 ne s'y applique pas.

Définition 3.3.2. *On dit qu'une fonction* positive *continue par morceaux sur un intervalle I est intégrable si elle vérifie une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\sup_{J\ segment \subset I} \int_J f(x)dx < \infty$;
2. *il existe une suite (a_n) décroissant vers* $\inf I$ *et une suite (b_n) croissant vers* $\sup I$ *telles que* $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ *existe ;*
3. *pour toute suite (a_n) décroissant vers a et toute suite (b_n) croissant vers b,* $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ *existe.*

On appelle alors intégrale *de f le nombre*

$$\sup_{J\ segment\ \subset I} \int_J f(x)dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

On peut définir de même l'intégrale d'une fonction de signe quelconque, en passant par la valeur absolue de la fonction.

Définition 3.3.3. *Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite* intégrable *si $|f|$ est intégrable sur I (au sens de la définition précédente). On dit aussi que l'intégrale* converge. *Dans ce cas, la limite*

$$\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$$

existe et ne dépend pas des suites (a_n) et (b_n) de I tendant respectivement vers $\inf I$ *et* $\sup I$*. On définit alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'intégrale d'une fonction au voisinage d'une borne de l'intervalle d'intégration. Le théorème suivant est tout à fait analogue à ce qui a été fait pour les séries.

Théorème 3.3.4. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle* $[a, b[$ [6] avec g positive.

6. le même résultat est bien entendu vrai pour des intervalles de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$ si l'on fait les substitutions adéquates

– *Si g n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$) au voisinage de b alors*

$$\int_a^x f(t)\,dt = o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right) \text{ (respectivement } \int_a^x f(t)\,dt = O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right),\ \int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt).$$

– *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$) au voisinage de b alors*

$$\int_x^b f(t)\,dt = o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right) \text{ (respectivement } \int_x^b f(t)\,dt = O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right),\ \int_x^b f(t)\,dt \sim \int_x^b g(t)\,dt).$$

Ce théorème permet notamment d'étudier l'intégrabilité d'une fonction en se ramenant à des équivalents.

Démonstration. On ne traite que le cas g non intégrable en b et $f = o(g)$, les autres cas se traitant de manière similaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f = o(g)$ au voisinage de b, il existe un élément x_0 de $[a,b[$ tel que si $x \in [x_0, b[$ alors, $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$. On a donc pour $x > x_0$

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Comme g n'est pas intégrable en b, $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b, et il existe un x_1 dans $[a,b[$ tel que si $x > x_1$, alors

$$\left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Finalement, on a, pour $x \geq \max(x_1, x_2)$

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui montre que $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$. □

La plupart des fonctions usuelles ont un comportement équivalent à une puissance de x au voisinage des bornes d'intégration. Il est donc utile de savoir pour quelles valeur de α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,\infty[$.

Propriété 3.3.5. *1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.*

2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha > 0$, il suffit donc d'étudier le comportement asymptotique des suites

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x \text{ et } \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x.$$

On a pour $\alpha = -1$

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x = [\ln(x)]_{1/n}^1 = \ln(n) \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^n = \ln(n).$$

Par conséquent, pour $\alpha = -1$, x^α n'est intégrable ni sur $]0,1]$ ni sur $[1,\infty[$. Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_{1/n}^{1} x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{1/n}^{1} = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \int_{1}^{n} x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{1}^{n} = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

On doit donc différencier selon le signe de $\alpha+1$. On observe alors que $\int_{1/n}^{1} x^\alpha \mathrm{d}x$ a une limite finie si et seulement si $\alpha > -1$ et que $\int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x$ a une limite finie si et seulement si $\alpha < -1$. □

3.4 Théorèmes de convergence

Après vérification, le théorème suivant n'est **pas** au programme du CAPES. Je l'énonce quand même à titre indicatif.

Théorème 3.4.1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. On suppose que*

1. *la suite (f_n) est croissante[7] ;*
2. *les f_n sont des fonctions positives ;*
3. *les f_n sont intégrables sur I ;*
4. *$f = \lim_n f_n$[8] est continue par morceaux.*

Si la suite $\int_I f_n(x)dx$ converge, alors f est intégrable et

$$\int_I f(x)dx = \lim_n \int_I f_n(x)dx.$$

Le théorème suivant est l'outil principal pour étudier l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 3.4.2 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. On suppose que*

1. *pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ converge ;*
2. *la fonction $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est continue par morceaux ;*
3. *il existe une fonction positive g intégrable sur I telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

   pour tout n et tout x de I.

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_n \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

Démonstration. Admis (conformément au programme du concours). □

7. C'est à dire que pour tout x, la suite $(f_n(x))$ est croissante. À ne pas confondre avec une suite de fonctions croissantes.
8. qui existe dans $[0,\infty]$ puisque la suite est croissante.

3.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions définies comme l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables. Une question naturelle est alors de trouver des critères pour assurer que ces fonctions sont continues, dérivables, etc.

On va noter (t, x) les différentes variables de la fonction à intégrer, t désignant la variable d'intégration, qui vivra donc dans un intervalle de $\mathbb{R}$, et x désigant la variable par rapport à laquelle on souhaite obtenir de la régularité (c'est-à-dire de la continuité, de la dérivabilité, etc.). Cette variable vivra dans une partie de $\mathbb{R}^d$ (par exemple).

Dans les théorèmes à suivre, on va donc faire des hypothèses d'intégrabilité sur la fonction $t \mapsto f(t, x)$, et des hypothèses de régularité sur la fonction $x \mapsto f(t, x)$.

On commence par énoncer un théorème permettant de prouver la *continuité* d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 3.5.1 (Théorème de continuité sous l'intégrale)**.** *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω une partie de $\mathbb{R}^d$. On suppose que*

1. *pour tout t de I la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur Ω ;*
2. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;*
3. *il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tout (t, x) de $I \times \Omega$.*

Alors la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable pour tout x et la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t, x)\,dt$$

est continue sur Ω.

Démonstration. Comme, pour tout x, la fonction $t \mapsto |f(t, x)|$ est majorée par la fonction intégrable g, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable et la définition de F a bien un sens.

Soit x un point de Ω et (x_n) une suite d'éléments de Ω tendant vers x. On va montrer que $F(x_n)$ tend vers $F(x)$, ce qui suffira à montrer que la fonction F est continue. On a $F(x_n) = \int_I f(t, x_n)\mathrm{d}t$. Posons $\phi_n(t) = f(t, x_n)$. D'après les hypothèses du théorème, la fonction ϕ_n est continue par morceaux, $(\phi_n(t))$ converge vers $\phi(t)$ pour tout t, $\phi(t)$ est continue par morceaux et on a l'inégalité

$$|\phi_n(t)| \leq g(t)$$

pour tout t.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on trouve

$$\lim_n F(x_n) = \lim_n \int_I \phi_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \phi(t)\mathrm{d}t = F(x).$$

□

Passons maintenant à un théorème de *dérivabilité.*

Théorème 3.5.2 (Théorème de dérivabilité sous l'intégrale)**.** *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, ou I et Ω sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ;*
2. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
3. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto \partial_x f(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;*
4. *il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|\partial_x f(t,x)| \leq g(t)$ pour tout (t,x) de $I \times \Omega$.*

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t,x)\,dx$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_I \partial_x f(t,x)\,dt.$$

Noter que pour se théorème, on n'a pas besoin d'hypothèse de domination sur la fonction f elle-même, mais seulement sur sa dérivée partielle en x.

Démonstration. Tout d'abord, F est bien définie car $t \mapsto f(t,x)$ est supposée intégrable sur I.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout x dans Ω et toute suite (h_n) telle que $x + h_n$ soit dans Ω, on a

$$\lim_n \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(x,t)\mathrm{d}t.$$

On aura en effet montré que la fonction F est dérivable et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \int_I \partial_x f(t,x)\mathrm{d}t$ qui est continue, au vu du théorème précédent.

On a

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n}\left(\int_I f(t,x+h_n)\mathrm{d}t - \int_I f(t,x)\mathrm{d}t\right) = \int_I \frac{f(t,x+h_n) - f(t,x)}{h_n}\mathrm{d}t.$$

Posons donc $\psi_n(t) = \frac{f(t,x+h_n)-f(t,x)}{h_n}$. La fonction ψ_n est continue par morceaux, converge simplement vers la fonction continue par morceaux $t \mapsto \partial_x f(t,x)$ et le théorème des accroissements finis montre que

$$|\psi_n(t)| = \left|\frac{f(t,x+h_n) - f(t,x+h_n)}{h_n}\right| \leq \frac{1}{h_n}|h_n| \sup_{\lambda\in[0,1]} |\partial_x f(t,x+\lambda h_n)| \leq g(t).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on en déduit

$$\lim_n \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(t,x)\mathrm{d}t,$$

ce qui achève la démonstration. □