Université Pierre et Marie Curie
Master Pro IFMA
2011/2012

Exercices : espaces de Sobolev

Exercice 1 :
Soit α un nombre réel. On considère la fonction

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^\alpha & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction u_α est-elle
- dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$? dans $\mathbb{H}^1(]0,1[)$? dans $\mathbb{H}^{-1}(]0,1[)$?
- dans $\mathbb{L}^2(]1,\infty[)$? dans $\mathbb{H}^1(]1,\infty[)$? dans $\mathbb{H}^{-1}(]1,\infty[)$?
- dans $\mathbb{L}^2(]-1,1[)$? dans $\mathbb{H}^1(]-1,1[)$? dans $\mathbb{H}^{-1}(]-1,1[)$?

Exercice 2 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit x_0 un point de $\mathbb{R}^n$. Par une translation et une homothétie, on peut se ramener au cas $x_0 = 0$ et $B(0,1) \subset \Omega$. On va montrer que la masse de Dirac au point 0, notée δ_0 est un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ si et seulement si $n = 1$. La masse de Dirac δ_0 est la forme linéaire définie, si φ est une fonction continue sur Ω, par $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que δ_0 ne s'identifie à aucune fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, aus sens où on ne peut pas trouver de fonction $\bar{\delta}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que
$$\int_\Omega \varphi(x)\bar{\delta}(x)\mathrm{d}x = \varphi(0),$$
pour toute fonction φ régulière.
2. On suppose que $n = 1$. Montrer que
$$|\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$
si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. En déduire que δ_0 s'étend par continuité à l'espace $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ et est donc un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.
3. En déduire notamment que, dans le cas $n = 1$, les fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ sont des fonctions *continues*.
4. On suppose que $n = 2$. Trouver un α tel que la fonction f définie sur Ω par
$$f(x,y) = \mathbf{1}_{x^2+y^2\leq 1}\left(-\log(x^2+y^2)\right)^\alpha$$
soit dans $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$.
5. En déduire que δ_0 n'est jamais un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ si $n \geq 2$.

Exercice 3 :
On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Soit u un élément de $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Le but de l'exercice est de montrer que les fonctions $|u|$, $u^+ = \max(0,u)$ et $u^- = \min(0,u)$ sont également des éléments de $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

1. Pourquoi peut on trouver une fonction φ_η de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω qui soit dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et telle que
$$\|\varphi_\eta - u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq \eta \text{ ?}$$
2. Montrer que la fonction φ_η^ε définie par $\varphi_\eta^\varepsilon = \left(\varphi_\eta^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2} - \varepsilon$ est également dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
3. Montrer que
$$\|\varphi_\eta^\varepsilon - |u|\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq 2\varepsilon\|\varphi_\eta\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta.$$
4. Montrer qu'il existe un suite η_n tendant vers 0 telle que
$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla\varphi_{\eta_n}^\varepsilon - \text{signe}(u)\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$
5. En déduire que $|u|$, u^+ et u^- sont dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, et calculer leurs gradients.
6. En déduire que si u est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, alors $|u|$, u^+ et u^- aussi.

Exercice 4 :
On considère l'équation de la chaleur :
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) & = f(t,x), \text{ sur }]0,T[\times\Omega \\ u(0,\cdot) & = u_0, \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$
1. Montrer l'estimation a priori suivante
$$\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 \mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega |\partial_t u(s,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 \mathrm{d}x + C\int_0^t \int_\Omega |f(s,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
(on pourra utiliser la fonction test $\partial_t u(t,\cdot)$).
2. On suppose que la fonction f est nulle, montrer l'estimation
$$\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{1}{t}\int_\Omega |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x.$$