Université Pierre et Marie Curie
Master Pro IFMA
2011/2012

Examen
Durée : 2h

Les notes de cours sont autorisées.

1. Question de cours :
Rappeler les principales différences entre le schéma d'Euler explicite et le schéma d'Euler implicite pour un problème d'évolution parabolique. Donner notamment les avantages et faiblesses de chaque schéma.

2. Schémas numériques pour l'équation d'advection.
On s'intéresse à l'équation suivante, appelée *équation d'advection.*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \lambda \partial_x u(t,x), & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où λ est un réel et u_0 une fonction donnée. On veut calculer numériquement la solution de cette équation [1]. On va discrétiser (1) en utilisant un pas d'espace h et un pas de temps k. On approche donc la fonction $u(t,x)_{(t,x)\in[0,\infty[\times\mathbb{R}}$ par une famille $(u_n^j)_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ pour laquelle on aurait $u_n^j \simeq u(nk, jh)$. Le schéma d'Euler explicite associé à cette équation est

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} = \lambda \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2h}, & (n,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \\ u_0^j = u(0, jh), & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

1. Calculer le symbole du schéma (2).
2. En déduire que le schéma d'Euler explicite est instable, quelles que soient les valeurs de $h > 0$ et $k > 0$.
3. Montrer que l'erreur de discrétisation associée à (2) au voisinage du point (t,x) est donnée par
$$\frac{k}{2}\partial_t^2 u(t,x) - \lambda\frac{h^2}{6}\partial_x^3 u(t,x) + \mathcal{O}(k^2 + h^3).$$
4. En déduire que la solution du schéma numérique (2) a un comportement similaire à celui de la solution de l'équation
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \lambda\partial_x u(t,x) - \alpha\Delta u(t,x), & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
où α est un réel strictement positif dont on précisera la valeur.
5. Quel est le comportement induit par l'ajout du terme $-\alpha\Delta u(t,x)$ au membre de droite de l'équation (1) ?

1. On remarquera que la solution de (1) est clairement donnée par $u(t,x) = u_0(x+\lambda t)$. Toutefois le but est ici d'étudier le comportement d'un schéma qui pourra se généraliser à des cas où la solution n'est pas explicite.

6. Pour compenser ce terme d'erreur, on ajoute un terme diffusif dans le schéma. On considère donc le schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} = \lambda \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2h} + \alpha \frac{u_n^{j+1} + u_n^{j-1} - 2u_n^j}{h^2}, & (n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \\ u_0^j = u(0, jh), & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3}$$

Calculer le symbole du schéma (3) et en déduire que ce schéma est stable sous la condition $\left|\lambda \frac{k}{h}\right| < 1$.

7. Quelle est l'erreur de discrétisation du schéma (3) ?

On va maintenant utiliser une autre méthode pour stabiliser le schéma. On suppose $\lambda > 0$, quitte à retourner l'espace. On va utiliser un schéma décentré

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} = \lambda \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{h}, & (n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \\ u_0^j = u(0, jh), & j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

8. Calculer le symbole de ce schéma.
9. En déduire que ce schéma est stable sous la condition $\left|\lambda \frac{k}{h}\right| < 1$. Donner une interprétation au fait qu'utiliser une discrétisation décentrée de l'espace permet de stabiliser le schéma (on pourra considérer la vraie solution de l'équation (1), qui est explicite dans notre cas) ?
10. Quelle est l'erreur de discrétisation du schéma ?
11. Quelles modifications doivent être faites si $\lambda < 0$?

3. Exercice :

Considérons l'équation de Black-Scholes

$$\begin{cases} \partial_\tau v(\tau, s) + \frac{s^2 \tilde{\sigma}^2}{2} \Delta v(\tau, s) + rs \partial_s v(\tau, s) - rv(\tau, s) = 0, & (\tau, s) \in]0, T[\times]0, \infty[\\ v(T, s) = v_T(s), & s \in]0, T[. \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer que la résolution de l'équation (4) peut se ramener à celle d'une équation aux dérivées partielles parabolique progressive à coefficients constants, de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u(t, x) - \alpha \partial_x u(t, x) + \beta u(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

On donnera l'expression des coefficients σ, α et β en fonction des coefficients de (4), et on supposera β strictement positif.

On va s'intéresser à la stabilité du schéma d'Euler implicite pour l'équation de Black-Scholes, donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1} - 2u_{n+1}^j \right) - \frac{\alpha}{2h} \left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^{j-1} \right) + \beta u_{n+1}^j = 0, \quad (n,j) \in \mathbb{N} \times \{-M, \dots, M\} \\ u_0^j = u(0, jh), j \in \{-M, \dots, M\}. \end{cases} \tag{6}$$

2. Montrer que le schéma (6) peut se mettre sous la forme $Au_{n+1} = u_n$, où u_n est le vecteur $(u_n^j)_{j \in \{-M, \dots, M\}}$ et $(A_{ij})_{(i,j) \in \{-M, \dots, M\}^2}$ est une matrice que l'on définira.

3. Montrer que si $|\alpha| \leq \frac{\sigma^2}{h}$, alors la matrice A est inversible.
4. Montrer que si $|\alpha| \leq \frac{\sigma^2}{h}$ et si $u_n^j \geq 0$ pour tout j, alors le principe du maximum suivant est vérifié

$$0 \leq u_{n+1}^j \leq (1+\beta k)^{-1} \max_{j=1}^{N} |u_n^j|. \tag{7}$$

On veut renforcer la stabilité du schéma. Pour cela, on procède comme dans l'exercice précédent en utilisant une différence finie décentrée pour le terme $\partial_x u(t,x)$. On suppose que α est positif, et on introduit le schéma

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1} - 2u_{n+1}^j\right) - \frac{\alpha}{2h}\left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^j\right) + \beta u_{n+1}^j = 0, \quad (n,j) \in \mathbb{N} \times \{-M,\dots,M\} \\ u_0^j = u(0,jh), j \in \{-M,\dots,M\}. \end{cases} \tag{8}$$

5. Mettre ce schéma sous forme matricielle.
6. Montrer que ce schéma vérifie l'inégalité (7) sans conditions sur α.
7. Pourquoi ce schéma n'est-il toutefois pas à systématiquement préférer au schéma centré (6) ?