Université Pierre et Marie Curie
Master Pro IFMA
2011/2012

Corrigé de l'examen

1. Question de cours :

On considère une équation d'évolution, pour fixer les idées l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$, dont on cherche à approcher la solution par une solution approchée $\tilde{u}^n$. Le schéma d'Euler explicite est défini en discrétisant le terme d'évolution $\partial_t u$ par une différence finie progressive $\delta t^{-1}(\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n)$, alors que le terme diffusif est approché à l'étape n : $\Delta u \simeq \tilde{\Delta}\tilde{u}^n$. On obtient alors un schéma qui peut se calculer numériquement de manière *exacte* (si on néglige les erreurs d'arrondi) : la valeur de l'approximation au $n+1^{\text{ème}}$ pas de temps est définie à partir de la valeur de l'approximation au $n^{\text{ème}}$ pas de temps par la formule $\tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^n + \delta t \tilde{\Delta}\tilde{u}^n$. En revanche, le schéma d'Euler implicite, obtenu en discrétisant le terme d'évolution par une différence finie rétrograde $\delta t^{-1}(u_n - u_{n-1})$, ne donne pas une expression explicite pour (u_{n+1}) à partir de (u_n), de sorte que la solution approchée ne peut se calculer qu'en faisant une approximation supplémentaire (typiquement en utilisant un inverse approché pour une matrice), ce qui demande un effort supplémentaire pour l'implémentation et le temps de calcul.

En revanche, le schéma d'Euler implicite est plus stable que le schéma d'Euler explicite : pour avoir la stabilité du schéma explicite, le pas de temps doit être choisi suffisamment petit, alors que cette condition peut être relaxée dans le cas du schéma implicite.

2. Schémas numériques pour l'équation d'advection.

1. Le symbole asssocié à un schéma numérique est la fonction E telle que $\widehat{u_{n+1}}(\xi) = E(\xi)\widehat{u_n}(\xi)$. On a ici
$$u_{n+1}^j = u_n^j + \frac{\lambda k}{2h}\left(u_n^{j+1} - u_n^{j-1}\right),$$
de sorte que
$$\begin{aligned}\widehat{u_{n+1}}(\xi) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ij\xi} u_{n+1}^j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ij\xi}\left(u_n^j + \frac{\lambda k}{2h}\left(u_n^{j+1} - u_n^{j-1}\right)\right), \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ij\xi} u_n^j \left(1 + \frac{\lambda k}{2h}\left(e^{-i\xi} - e^{i\xi}\right)\right), \\ &= (1 - i\frac{\lambda k}{h}\sin(\xi))\widehat{u_n}(\xi).\end{aligned}$$
le symbole de ce schéma est donc $E_1(\xi) = 1 - i\frac{k}{h}\sin(\xi)$.
2. Sur le symbole, la stabilité se voit par le fait que $|E_1(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ. Or ici, on voit que $|E_1(\xi)|^2 = 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{h^2}\sin^2(\xi)$ qui est strictement supérieur à 1 dès que $\sin(\xi) \neq 0$.

3. L'erreur de discrétisation est par définition la quantité

$$\varepsilon_n^j = \frac{\bar{u}_{n+1}^j - \bar{u}_n^j}{k} - \lambda \frac{\bar{u}_n^{j+1} - \bar{u}_n^{j-1}}{2h}$$

où l'on définit $\bar{u}_n^j = u(nk, jh)$. On a donc, en utilisant des développements de Taylor (les dérivées de u sont calculées au point (nk, jh)),

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^j =& \frac{\bar{u}_n^j + k\partial_t u + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u + \mathcal{O}(k^3) - \bar{u}_n^j}{k} \\
&- \lambda \frac{\bar{u}_n^j + h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u + \mathcal{O}(h^4) - \left(\bar{u}_n^j - h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u + \mathcal{O}(h^4)\right)}{2h} \\
=& (\partial_t u - \lambda \partial_x u) + \frac{k}{2}\partial_t^2 u - \frac{\lambda h^2}{6}\partial_x^3 u + \mathcal{O}(k^2 + h^3)
\end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque $\partial_t u - \lambda \partial_x u = 0$.

4. Replaçons la solution $\tilde{u}_n^j = u(nk, jh)$ de $\partial_t u = \lambda \partial_x u - \alpha \partial_x^2 u$ dans le schéma (2). L'erreur de discrétisation obtenue est alors (les dérivées de la fonction u sont évaluée au point (nk, jh))

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{u}_{n+1}^j - \tilde{u}_n^j}{k} - \lambda \frac{\tilde{u}_n^{j+1} - \tilde{u}_n^{j-1}}{2h} =& \frac{\tilde{u}_n^j + k\partial_t u + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u + \frac{k^3}{6}\partial_t^3 u + \mathcal{O}(k^4) - \tilde{u}_n^j}{k} \\
&- \lambda \frac{\tilde{u}_n^j + h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u - \left(\tilde{u}_n^j - h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u\right) + \mathcal{O}(h^4)}{2h} \\
&- \partial_t u + \lambda \partial_x u - \alpha \partial_x^2 u \\
=& \frac{k}{2}\partial_t^2 u - \alpha \partial_x^2 u + \frac{k^2}{6}\partial_t^3 u - \lambda \frac{h^2}{6}\partial_x^3 u + \mathcal{O}(k^3 + h^3).
\end{aligned}$$

On cherche une valeur de α faisant s'annuler (à l'ordre $\mathcal{O}(k)$) les deux termes $\frac{k}{2}\partial_t^2 u - \alpha \partial_x^2 u$. Calculons $\partial_t^2 u$. On a

$$\partial_t^2 u = \left(\lambda \partial_x - \alpha \partial_x^2\right)^2 u = \lambda^2 \partial_x^2 u - \alpha\lambda \partial_x^3 u + \alpha^2 \partial_x^4 u.$$

Par conséquent, en posant $\alpha = \frac{\lambda^2 k}{2}$, on obtient

$$\frac{k}{2}\partial_t^2 u - \alpha \partial_x^2 u = \frac{k^2 \lambda^3}{4}\partial_x^3 u + \frac{k^3 \lambda^4}{8}\partial_x^4 u,$$

de sorte que

$$\frac{\tilde{u}_{n+1}^j - \tilde{u}_n^j}{k} - \lambda \frac{\tilde{u}_n^{j+1} - \tilde{u}_n^{j-1}}{2h} = k^2 \left(\frac{1}{6}\partial_t^3 u + \frac{\lambda^3}{4}\partial_x^3 u\right) - \lambda \frac{h^2}{6}\partial_x^3 u + \mathcal{O}(k^3 + h^3).$$

Le schéma (2) est donc, à l'ordre $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$, une discrétisation de l'équation $\partial_t u = \lambda \partial_x u - \alpha \Delta u$, avec $\alpha = \frac{\lambda^2 k}{2}$.

5. Le terme $\Delta u(t,x)$ est un terme de diffusion. Comme il apparaît ici avec un coefficient négatif au second membre, c'est un terme de diffusion rétrograde, ce qui va avoir tendance à créer des singularités sur la solution de l'équation $\partial_t u = \lambda \partial_x u - \alpha \Delta u$. Cela explique pourquoi le schéma (2) est instable.
6. Le schéma (3) vérifie

$$
\begin{aligned}
\widehat{u_{n+1}}(\xi) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{n+1}^j e^{ij\xi} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(u_n^j + \frac{\lambda k}{2h}\left(u_n^{j+1} - u_n^{j-1}\right) + \frac{\alpha k}{h^2}\left(u_n^{j+1} + u_n^{j-1} - 2u_n^j\right)\right) e^{ij\xi}, \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_n^j e^{ij\xi} \left(1 - \frac{2\alpha k}{h^2} - i\frac{\lambda k}{h}\sin(\xi) + \frac{2\alpha k}{h^2}\cos(\xi)\right).
\end{aligned}
$$

On remarquera de plus que $\frac{2\alpha k}{h^2} = \frac{\lambda k}{h}$. Posons $\mu = \frac{\lambda k}{h}$. Le symbole du schéma est donc donné par

$$E_2(\xi) = 1 - \mu^2 + i\mu\sin(\xi) + \mu^2\cos(\xi).$$

En posant $\rho = 1 - \cos(\xi) \in [0,2]$, on obtient

$$
\begin{aligned}
|E_2(\xi)|^2 &= (1 - \mu^2 + \mu^2\cos(\xi))^2 + \mu^2(1 - \cos(\xi)^2) \\
&= (1 - \mu^2\rho)^2 + \mu^2\rho(2-\rho) \\
&= 1 + (\mu^4 - \mu^2)\rho^2.
\end{aligned}
$$

Pour que $|E_2(\xi)| \le 1$ quel que soit ξ, on doit donc avoir $\mu^4 - \mu^2 \le 0$, soit encore $\mu \in [-1,1]$, ce qui correspond bien à la condition $\left|\frac{\lambda k}{h}\right| \le 1$.
7. En reprenant le calcul fait à la question 3 et en utilisant le développement

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\bar{u}_n^{j+1} + \bar{u}_n^{j-1} - 2\bar{u}_n^j}{h^2} =& \frac{\lambda^2 k}{2h^2}\Bigg((\bar{u}_n^j + h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u + \frac{h^4}{24}\partial_x^4 u) \\
&+ (\bar{u}_n^j - h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u + \frac{h^4}{24}\partial_x^4 u) - 2\bar{u}_n^j + \mathcal{O}(h^5)\Bigg) \\
=& \frac{\lambda^2 k}{2}\partial_x^2 u + \frac{\lambda^2 k h^2}{24}\partial_x^4 u + \mathcal{O}(kh^3),
\end{aligned}
$$

on obtient

$$\frac{\bar{u}_{n+1}^j - \bar{u}_n^j}{k} - \lambda\frac{\bar{u}_n^{j+1} - \bar{u}_n^{j-1}}{2h} - \alpha\frac{\bar{u}_n^{j+1} + \bar{u}_n^{j-1} - 2\bar{u}_n^j}{h^2} = \frac{k}{2}\partial_t^2 u - \frac{\lambda h^2}{6}\partial_x^3 u - \frac{\lambda^2 k}{2}\partial_x^2 u - \frac{\lambda^2 k h^2}{24}\partial_x^4 u + \mathcal{O}(k^2 + kh^3).$$

Comme u vérifie $\partial_t u = \lambda\partial_x u$, on a $\partial_t^2 u = \lambda^2\partial_x^2 u$, d'où

$$\frac{\bar{u}_{n+1}^j - \bar{u}_n^j}{k} - \lambda\frac{\bar{u}_n^{j+1} - \bar{u}_n^{j-1}}{2h} - \alpha\frac{\bar{u}_n^{j+1} + \bar{u}_n^{j-1} - 2\bar{u}_n^j}{h^2} = -\frac{\lambda h^2}{6}\partial_x^3 u - \frac{\lambda^2 k h^2}{24}\partial_x^4 u + \mathcal{O}(k^2 + h^3).$$

8. Le schéma vérifie

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{n+1}e^{ij\xi} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(u_n^j + \frac{k\lambda}{h}\left(u_n^{j+1} - u_n^j\right)\right)e^{ij\xi} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_n^j \left(1 + \frac{k\lambda}{h}\left(e^{-i\xi} - 1\right)\right)e^{ij\xi} \\
&= \left(1 + \frac{k\lambda}{h}\left(e^{-i\xi} - 1\right)\right)\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_n^j e^{ij\xi}.
\end{aligned}$$

Son symbole est donc $E_3(\xi) = 1 + \frac{k\lambda}{h}(e^{-i\xi} - 1)$.

9. Si $\left|\frac{k\lambda}{h}\right| \leq 1$, on a

$$|E_3(\xi)| = \left|1 - \frac{k\lambda}{h} + \frac{k\lambda}{h}e^{-i\xi}\right| \leq \left|1 - \frac{k\lambda}{h}\right| + \left|\frac{k\lambda}{h}\right| = 1$$

et le schéma est stable. Inversement, si $\left|\frac{k\lambda}{h}\right| > 1$, on a $E_3(\pi) = 1 - 2\frac{k\lambda}{h} < -1$ (car $\lambda > 0$), de sorte que le schéma est instable.

On peut interpréter cette stabilité géométriquement : la solution de l'équation est donnée par $u(t,x) = u_0(x + \lambda t)$, de sorte que pour $\lambda > 0$, la condition initiale se déplace vers la gauche à vitesse constante λ. De même, le schéma décentré permet de calculer u_{n+1}^j à partir de u_n^j et u_n^{j+1}, de sorte que l'information sur la solution "vient de la droite". Ce schéma évolue donc dans le même sens que l'équation, ce qui garantit ça stabilité.

10. On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} - \lambda\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{h} &= \frac{u_n^j + k\partial_t u + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u + \mathcal{O}(k^3) - u_n^j}{k} - \lambda\frac{u_n^j + h\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u + \mathcal{O}(h^3) - u_n^j}{h} \\
&= (\partial_t u + \frac{k}{2}\partial_t^2 u + \mathcal{O}(k^2)) - \lambda(\partial_x u + \frac{h}{2}\partial_x^2 u + \mathcal{O}(h^2)) \\
&= \frac{k}{2}\partial_t^2 u - \lambda\frac{h}{2}\partial_x^2 u + \mathcal{O}(h^2 + k^2).
\end{aligned}$$

11. Si $\lambda < 0$ il faut remplacer la différence finie $\frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{h}$ par $\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{h}$. En effet, le symbole obtenu est alors $1 + \frac{k\lambda}{h}(1 - e^{i\xi})$, qui vaut $1 + 2\frac{k\lambda}{h}$ pour $\xi = \pi$.

3. Exercice :

1.

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{\sigma^2}{2}\Delta u(t,x) - \alpha\partial_x u(t,x) - \beta u(t,x) = 0, & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

On fait le changement de variables $t = T - \tau$ et $x = \log(s)$, et on obtient l'équation

$$\partial_\tau v(\tau,s) + \frac{s^2\sigma^2}{2}\Delta v(\tau,s) + rs\partial_s v(\tau,s) - rv(\tau,s) = 0,$$

On a donc $\alpha =$, $\beta =$ et $\sigma =$.

On va s'intéresser à la stabilité du schéma d'Euler implicite pour l'équation de Black-Scholes, donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{k} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1} - 2u_{n+1}^j\right) - \frac{\alpha}{2h}\left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^{j-1}\right) - \beta u_{n+1}^j = 0, \quad (n,j) \in \mathbb{N} \times \{-M, \dots, M\} \\ u_0^j = u(0, jh), j \in \{-M, \dots, M\}. \end{cases} \tag{2}$$

2. La relation (2) se récrit

$$\begin{aligned} u_n^j &= u_{n+1}^j - \frac{k\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1} - 2u_{n+1}^j\right) - \frac{k\alpha}{2h}\left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^{j-1}\right) - k\beta u_{n+1}^j, \\ &= \left(1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2}\right) u_{n+1}^j - \left(\frac{k\alpha}{2h} + \frac{k\sigma^2}{2h^2}\right) u_{n+1}^{j+1} + \left(\frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2}\right) u_{n+1}^{j-1}. \end{aligned}$$

qui peut se mettre sous la forme matricielle $u_n = Au_{n+1}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2} & -\frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2} & 0 & 0 \\ & & & \\ & 0 & \frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2} & 1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

3. Si $|\alpha| \leq \frac{\sigma^2}{h}$, les termes hors diagonaux $-\frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2}$ et $\frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2}$ sont négatifs, alors que la somme des termes de chaque ligne est nulle. On a donc affaire à une matrice à diagonale strictement dominantes, qui est donc inversible.
4. Supposons que l'égalité

$$0 \leq u_{n+1}^j \leq (1 + \beta k)^{-1} \max_{j=1}^{N} |u_n^j|$$

ne soit pas vérifiée pour tout j et considérons un élément j tel que $u_{n+1}^j > (1+\beta k)^{-1} \max_{j=1}^N |u_n^j|$.
5. Le schéma peut se récrire

$$\begin{aligned} u_n^j &= u_{n+1}^j - \frac{k\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1} - 2u_{n+1}^j\right) - \frac{k\alpha}{2h}\left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^{j}\right) - k\beta u_{n+1}^j, \\ &= \left(1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2}\right) u_{n+1}^j - \frac{k\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n+1}^{j+1} + u_{n+1}^{j-1}\right) - \frac{k\alpha}{2h}\left(u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^{j}\right), \end{aligned}$$

ce qui peut se mettre sous la forme matricielle $u_n = Au_{n+1}$, où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2} & -\frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2} & 0 & 0 \\ & & & \\ & 0 & \frac{k\alpha}{2h} - \frac{k\sigma^2}{2h^2} & 1 - k\beta + \frac{k\sigma^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

6. Montrer que ce schéma vérifie l'inégalité ************ sans conditions sur α.
7. Le schéma (8) est plus stable que le schéma (6), toutefois l'erreur de discrétisation est plus grande. En effet, le fait d'utiliser un terme non symétrique pour la discrétisation du terme de transport amène à une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(h^2)$, alors qu'une discrétisation symétrique donne une erreur en $\mathcal{O}(h^2)$.