Partie 1 : Étude de l'équation de la chaleur

Raphaël Roux

Nous allons nous intéresser à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, ou équation de diffusion. Cette équation s'écrit

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x),$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur Laplacien, et le couple (t,x) est dans $[0,\infty[\times\Omega$, ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \text{pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites

$$u(t,x) = g(t,x) \quad \text{pour } (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega.$$

où u_0 et g sont des fonctions données.

Cette équation est le prototype des équations dites *équations parabolique*. La terminologie "parabolique" vient du fait que le membre de gauche peut s'écrire comme $(\partial_t - \partial_x^2)f$, à rapprocher de l'équation $y - x^2 = 0$ de la parabole.

La première question à se poser est de savoir quel sens donner à cette équation. Le sens le plus naturel est de considérer qu'une fonction $u : [0,\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ est solution si elle est dérivable par rapport à t en tout point, qu'elle admet une dérivée seconde par rapport à chaque x_i en tout point et que les dérivées soient reliées par la relation

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \tag{0.1}$$

quel que soit le point (t,x). Il apparaîtra que cette définition est trop restrictive, car elle exige de connaître la régularité de la fonction. La cause est que cette approche est trop "locale", et que la bonne manière de faire est de considérer la solution u comme un tout et non comme une collection de valeur $u(t,x)$.

La bonne notion de solution s'obtient en considérant non pas les valeurs $u(t,x)$ en chaque point, mais plutôt les valeurs prises par la quantité $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, pour une certaine collection de *fonctions test* φ. On regarde donc la fonction au sens *faible*. Pour étudier ces quantités, il suffit de multiplier l'équation de la chaleur par φ, puis d'intégrer par rapport à x. On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \Delta u(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \nabla u(t,x)\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(t,x)\varphi(x). \tag{0.2}$$

On *définira* donc une solution de l'équation (0.1) comme une fonction vérifiant l'égalité (0.2) pour toutes les fonctions φ d'une certaine classe. La question improtante est donc de choisir les bons espaces dans lesquels doivent vivre les fonctions $u(t,.)$, $\partial_t u(t,.)$ et φ. L'esquisse de définition (0.2) fait intervenir des intégrales sur Ω du produit de deux fonctions. Un cas où ces intégrales sont bien défini est le cas où l'une des fonctions est dans l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega)$ et l'autre est dans l'espace $\mathbb{L}^q(\Omega)$, où p et q satisfont la relation $1/p + 1/q = 1$. Si on veut choisir ces deux espaces égaux, il suffit de considérer l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable. En effet, si u et v sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, l'intégrale $\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x$ est bien définie.

L'expression (0.2) fait également intervenir l'intégrale $\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x$. Au vu de ce que l'on vient de dire, l'hyptohèse naturelle est donc que les fonctions ∇u et ∇v soient des fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. La théorie des *espaces de Sobolev* est le bon cadre pour définir ces objets.

1 Espace de Sobolev

Dans toute cette partie, on supposera que l'ouvert Ω à un bord suffisament régulier (par exemple qu'au voisinage de tout point du bord, on peut écrire Ω comme l'ensemble des points situés d'un côté du graphe d'une fonction régulière).

On veut définir l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ des fonctions $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dont la dérivée est une fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Une définition possible est la suivante, on l'on utilise une propriété d'approximation (repenser à la construction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ comme le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$).

Définition 1.1. *L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est défini comme le complété de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ des fonctions régulières à support compact définies sur un voisinage de $\bar{\Omega}$ par rapport à la norme*

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1} = \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ est à comprendre comme l'espace des fonctions régulières sur Ω qui se prolongent par continuité sur $\bar{\Omega}$ (ainsi que ses dérivées). Il ne faut pas prendre la même définition avec les espaces $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (qui peuvent paraître naturels), car

- l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ comprend des fonctions qui explosent au bord de Ω, et dont la norme $\|.\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$ n'est donc pas forcément définie ;
- l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ne comprend que des fonctions nulles sur le bord, ce qui fait que l'espace obtenu est plus petit (il s'agit de l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ défini plus loin).

On remarquera que $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En effet, si φ est un élément de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ défini comme la limite de la suite (φ_n) (où les φ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$), la suite φ_n vérifie

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \underset{n,m\to\infty}{\to} 0,$$

puisque la suite (φ_n) est de Cauchy dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, la suite (φ_n) est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Un élément de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ peut donc être considéré, à égalité presque partout près, comme une fonction meseurable de Ω dans $\mathbb{R}$.

Un élément φ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ n'est pas à strictement parler une fonction, notamment on ne peut pas parler de la valeur $\varphi(x)$ de φ en un point x, ni, de manière plus générale, de la restriction de φ à une partie de mesure nulle. Les fonctions φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sont en revanche plus régulières, car on peut parler de leur valeur sur le *bord* $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω, en vertu de la proposition suivante.

Proposition 1.2 (Théorème de trace)**.** *Soit φ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$. On a l'inégalité*

$$\left(\int_{\partial\Omega} |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}\sigma(x)\right)^2 \leq C\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Autrement dit, on peut définir une fonction continue*, appelée fonction* trace *par*

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^1(\Omega) &\to \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \\ \varphi &\mapsto \varphi_{|\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Démonstration. On va seulement faire la preuve dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[$. Le cas général s'y ramène en utilisant localement un difféomorphisme entre le bord de l'ouvert et $\mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[$ (ce qui est possible puisqu'on a supposé le bord de Ω régulier).

On va écrire le $n-$uplet x sous la forme $x = (x', x_n)$, avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $x_n \geq 0$. Pour une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x',0)^2 &= -\int_0^\infty \partial_{x_n}\left(\varphi(x',x_n)^2\right)\mathrm{d}x_n \qquad \text{(car } \varphi \text{ est à support compact)} \\ &= -2\int_0^\infty \varphi(x',x_n)\partial_{x_n}\varphi(x',x_n)\mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} |\varphi(x',0)|^2 &\leq 2\int_0^\infty |\varphi(x',x_n)||\partial_{x_n}\varphi(x',x_n)|\mathrm{d}x_n \\ &\leq \left(\int_0^\infty |\varphi(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n + \int_0^\infty |\partial_{x_n}\varphi(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n\right) \quad \text{(on utilise l'inégalité } 2ab \leq a^2+b^2\text{).} \end{aligned}$$

Après intégration par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, on obtient le résultat. □

On peut notament énoncer une formule d'intégration par parties dans un ouvert Ω dès que que l'on a des fonctions dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Proposition 1.3. *Pour φ et ψ deux fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a l'égalité*

$$\int_\Omega \varphi(x)\partial_{x_i}\psi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \psi(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\psi(x)(n(x)\cdot e_i)\mathrm{d}\sigma(x),$$

ou bien, en multipliant par e_i et en sommant sur tout les indices i,

$$\int_\Omega \varphi(x)\nabla\psi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \psi(x)\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\psi(x)n(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

Dans ces deux expressions, n est le vecteur normal sortant sur le bord de Ω.

Les intégrales de la proposition (1.3) sont bien définies :
- la première car les fonctions φ et $\partial_{x_i}\psi$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (ψ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$) ;
- la deuxième car les fonctions ψ et $\partial_{x_i}\varphi$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (φ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$) ;

– la troisième car les fonctions φ et ψ sont dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. La preuve se fait en montrant la formule pour les fonctions régulières (dans $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$), puis en approchant les fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ par des fonctions régulières et en utilisant la continuité de chaque intégrale par rapport au couple (u, v). □

Définition 1.4. *L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est le complété dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions régulières à support compact inclus dans Ω. On peut remarquer qu'il s'agit également de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est nulle.*

L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ correspond aux fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'annulant sur le bord.

Proposition 1.5. *Les espaces $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sont tout deux des espaces de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\varphi(x)\nabla\psi(x)\mathrm{d}x.$$

On a donc deux espaces de Hilbert $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{L}^2(\Omega)$ munis chacun d'un produit scalaire qui lui est propre, mais tels que $\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ en tant *qu'ensemble*, avec une injection continue. De plus, pour la topologie de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (par exemple parce que l'espace des fonctions régulières est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$).

On sait qu'il est possible d'identifier une espace de Hilbert H avec son dual par la correspondance $x \mapsto \langle x, . \rangle$. Nous allons voir qu'il faut prendre des précautions dans notre situation. En effet, on peu identifier $\mathbb{L}^2(\Omega)$ à son dual. L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'injectant continuement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, une forme linéaire sur $\mathbb{L}^2(\Omega)$ donne, par restriction à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ une forme linéaire sur $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, on a une application $\mathbb{L}^2(\Omega) \to (\mathbb{H}^1(\Omega))'$. Comme l'injection $\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ est dense, l'application $\mathbb{L}^2(\Omega) \to (\mathbb{H}^1(\Omega))'$ est en fait une injection (une forme linéaire sur $\mathbb{H}^1(\Omega)$ se prolonge de manière unique à $\mathbb{L}^2(\Omega)$), et on a la suite

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (\mathbb{H}^1(\Omega))'.$$

La même remarque vaut pour l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (\mathbb{H}_0^1(\Omega))'.$$

Proposition 1.6 (Inégalité de Poincaré)**.** *On suppose que l'ouvert Ω est* borné. *Pour une fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité*

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Notamment, on a

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ce qui montre que $\|\nabla .\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ est une norme pour l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

L'inégalité de Poincaré est bien évidemment fausse pour une fonction quelconque de $\mathbb{H}^1(\Omega)$: il suffit de prendre φ constante et non nulle, on a alors $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \neq 0$ mais $\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$.

Démonstration. On prouve l'inégalité pour une fonction régulière, le cas général se faisant en passant à la limite.

Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. On peut prolonger φ par 0 hors de Ω et obtenir ainsi une fonction régulière. On note $x = (x', x_n)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties selon la dernière coordonnée, on trouve

$$\int_\Omega \varphi(x', x_n)^2 \mathrm{d}x = 2 \int_\Omega x_n \varphi(x', x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n) \mathrm{d}x.$$

Il n'y a pas de terme de bord puisque φ est à support compact. Comme Ω est un ouvert borné, on a $|x_n| \leq C$ sur le support de Ω. On a donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \leq & 2 \int_\Omega |x_n| |\varphi(x', x_n)| |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)| \mathrm{d}x \\ \leq & C \left(\int_\Omega |\varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2},\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz, soit encore

$$\left(\int_\Omega |\varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq C \left(\int_\Omega |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla \varphi(x', x_n)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

$\square$