

Partie 1 : Étude de l'équation de la chaleur

Raphaël Roux

1 Introduction

Nous allons nous intéresser à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, ou équation de diffusion. Cette équation s'écrit

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur Laplacien, et le couple (t, x) est dans $[0, \infty[\times \Omega$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale

$$u(0, x) = v(x), \text{ pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites

$$u(t, x) = g(t, x) \text{ pour } (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega$$

où v et g sont des fonctions données.

Cette équation est le prototype des équations dites *équations parabolique*. La terminologie "parabolique" vient du fait que le membre de gauche s'écrit en dimension 1 comme $(\partial_t - \partial_x^2)f$, à rapprocher de l'équation $y - x^2 = 0$ de la parabole.

Une des interprétations possibles de l'équation (1) est la modélisation d'un flux de chaleur dans un corps. Voici l'interprétation de chaque terme de l'équation :

- le terme $\partial_t u$ permet de décrire l'évolution de la distribution de chaleur au cours du temps. Notamment, on s'attend à pouvoir définir la valeur d'une solution à un temps $t > 0$ quelconque en connaissant la distribution à l'instant 0.
- le terme Δu correspond à une variation de u par rapport à sa moyenne locale. Un point x où $\Delta u(x) > 0$ est un point plus froid que son entourage direct (et dont la température va augmenter), et inversement. Ce terme correspond donc à un phénomène de moyenne, et va avoir tendance à rendre régulières les solutions de l'équation.
- le terme v correspond à la distribution de chaleur à l'instant initial.
- le terme g correspond à un thermostat situé sur le bord de l'ouvert et imposant sa chaleur à la frontière du système.

La première question à se poser avant la résolution du problème (1) est de savoir quel sens donner à cette équation. Le sens le plus naturel est de considérer qu'une fonction $u : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est solution si elle est dérivable par rapport à t en tout point, qu'elle admet une dérivée seconde par rapport à chaque x_i en tout point et que les dérivées soient reliées par la relation (1) quel que soit le point (t, x) . Il apparaîtra que cette définition est trop restrictive, car elle exige de connaître ne permet de considérer

que des fonctions régulières car cette approche est trop “locale”. Une meilleure manière de faire est de considérer la solution u comme un tout et non comme une collection de valeur $u(t, x)$.

La notion de solution que l’on va considérer s’obtient en considérant les valeurs prises par la quantité $\int_{\Omega} u(t, x)\varphi(x)dx$, pour une certaine collection de *fonctions test* φ . On dit que l’on considère des *solutions faibles*. Pour étudier ces quantités, il suffit de multiplier l’équation de la chaleur par φ , puis d’intégrer par rapport à x . On obtient alors

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(t, x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)\varphi(x)dx.$$

En intégrant par partie, on obtient, si l’on suppose φ nulle sur le bord $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x)\nabla\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)\varphi(x)dx. \quad (2)$$

On *définira* donc une solution de l’équation (1) comme une fonction vérifiant l’égalité (2) pour toutes les fonctions φ d’une certaine classe. La question importante est donc de choisir les bons espaces dans lesquels doivent vivre les fonctions $u(t, \cdot)$, $\partial_t u(t, \cdot)$ et φ pour que l’égalité (2) ait un sens. L’esquisse de définition (2) fait intervenir des intégrales sur Ω du produit de deux fonctions. Un cas où ces intégrales sont bien définies est le cas où l’une des fonctions est dans l’espace $\mathbb{L}^p(\Omega)$ et l’autre est dans l’espace $\mathbb{L}^q(\Omega)$, où p et q satisfont la relation $1/p + 1/q = 1$. Si on veut avoir une expression symétrique où ces deux espaces seraient égaux, il suffit de considérer l’espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable. En effet, si u et v sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, l’intégrale $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ est bien définie.

L’expression (2) fait également intervenir l’intégrale $\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx$. Au vu de ce que l’on vient de dire, l’hypothèse naturelle est donc que les fonction ∇u et ∇v soient des fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

On a donc besoin d’objets qui sont des fonctions dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et dont le gradient est dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Ces objets ne peuvent pas être définis à l’aide de dérivée ponctuelles, car les fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ peuvent très bien ne pas être dérivables en tout point (loin de là!). La théorie des *espaces de Sobolev* est le bon cadre pour définir ces objets.

2 Espace de Sobolev

Dans toute cette partie, on supposera que l’ouvert Ω à un bord suffisamment régulier, au sens de la définition suivante. On note Q , Q^+ et Q^0 les ensembles

$$\begin{aligned} Q &= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n, |x'| < 1, -1 < x_n < 1\}, \\ Q^+ &= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n, |x'| < 1, 0 < x_n < 1\} \\ \text{et } Q^0 &= \{(x', 0) \in \mathbb{R}^n, |x'| < 1\}. \end{aligned}$$

Définition 2.1. *On dit qu’un ouvert Ω est régulier si pour tout point x de $\partial\Omega$, il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 bijective entre un voisinage V_x de x et Q dont la réciproque φ^{-1} soit de classe \mathcal{C}^1 et qui envoie $\Omega \cap V_x$ sur Q^+ et $\partial\Omega \cap V_x$ sur Q^0 .*

On veut définir l’espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ des fonctions $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dont la dérivée est une fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, appelé espace de Sobolev. Une définition possible est la suivante, où l’on utilise une propriété d’approximation (repenser à la construction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ comme le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$).

Définition 2.2. L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est défini comme le complété par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

de l'espace $\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} < \infty\}$ des fonctions régulières sur Ω de norme finie.

On peut également définir $\mathbb{H}^1(\Omega)$ comme suit, toutefois cette définition n'est pas équivalente à la définition 2.3 si l'ouvert n'est pas régulier.

Définition 2.3. L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est défini comme le complété de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ des fonctions régulières à support compact sur un voisinage de $\bar{\Omega}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$.

L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ est à comprendre comme l'espace des fonctions régulières sur Ω qui se prolongent par continuité sur $\bar{\Omega}$ (ainsi que ses dérivées). Il ne faut pas énoncer la définition 2.3 avec les espaces $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (qui pourraient paraître naturels), car

- l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ comprend des fonctions qui explosent au bord de Ω , et dont la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$ n'est donc pas forcément définie;
- l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact ne comprend que des fonctions nulles sur le bord, ce qui fait que son complété est plus petit (il s'agit de l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ défini plus loin).

On remarquera que $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En effet, si φ est un élément de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ défini comme la limite de la suite (φ_n) (où les φ_n sont de classe \mathcal{C}^∞), la suite φ_n vérifie

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0,$$

puisque la suite (φ_n) est de Cauchy dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, la suite (φ_n) est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Un élément de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ peut donc être considéré, à égalité presque partout près, comme une fonction de Ω dans \mathbb{R} .

De plus, pour tout élément u de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on peut définir son gradient $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$ qui est alors une fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} < \infty\} &\rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \varphi &\mapsto \nabla\varphi \end{aligned}$$

est continue, si l'espace de départ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$. Cette application peut donc être prolongée à l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

On peut donner d'autres définitions équivalentes de l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Voici trois propriétés qui permettraient de définir $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Proposition 2.4. Si Ω est régulier, l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ constitué des fonctions u telles qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $(\varphi_n)_n$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers u et tel que $(\nabla\varphi_n)$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. La limite de $(\nabla\varphi_n)$ est alors égale à ∇u .

Proposition 2.5. L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ constitué des fonctions u telles qu'il existe n fonctions v_1, \dots, v_n de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telles que pour toute fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on ait

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \varphi(x) dx,$$

pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$. Les fonctions v_i sont uniques et vérifient $v_i = \partial_{x_i} u$.

Proposition 2.6. *L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ constitué des fonctions u telles que pour toute fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on ait l'inégalité*

$$\int_{\Omega} u(x) \nabla \varphi(x) dx \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

pour une certaine constante C .

Un élément φ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ n'est pas à strictement parler une fonction, notamment on ne peut pas parler de la valeur $\varphi(x)$ de φ en un point x , ni, de manière plus générale, de la restriction de φ à une partie de mesure nulle. Les fonctions φ de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ sont en revanche plus régulières, car on peut parler de leur valeur sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω , en vertu de la proposition suivante.

Proposition 2.7 (Théorème de trace). *Soit φ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$. On a l'inégalité*

$$\left(\int_{\partial\Omega} |\varphi(x)|^2 d\sigma(x) \right)^2 \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Autrement dit, on peut définir une fonction continue, appelée fonction trace par

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

ou, plus précisément, il existe une unique application linéaire continue de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ qui correspond à la restriction à $\partial\Omega$ pour les fonction régulières.

Démonstration. On va seulement faire la preuve dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times]0, \infty[$. Le cas général s'y ramène en utilisant localement un difféomorphisme entre le bord de l'ouvert et $\mathbb{R}^{n-1} \times]0, \infty[$ (ce qui est possible puisqu'on a supposé le bord de Ω régulier).

On va écrire le n -uplet x sous la forme $x = (x', x_n)$, avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $x_n \geq 0$. Pour une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x', 0)^2 &= - \int_0^\infty \partial_{x_n} (\varphi(x', x_n)^2) dx_n \quad (\text{car } \varphi \text{ est à support compact}) \\ &= -2 \int_0^\infty \varphi(x', x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n) dx_n. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} |\varphi(x', 0)|^2 &\leq 2 \int_0^\infty |\varphi(x', x_n)| |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)| dx_n \\ &\leq \left(\int_0^\infty |\varphi(x', x_n)|^2 dx_n + \int_0^\infty |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 dx_n \right) \quad (\text{on utilise l'inégalité } 2ab \leq a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Après intégration par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, on obtient le résultat. \square

On peut notamment énoncer une formule d'intégration par parties dans un ouvert Ω dès que l'on a des fonctions dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Proposition 2.8. Pour φ et ψ deux fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a l'égalité

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \partial_{x_i} \psi(x) dx = - \int_{\Omega} \psi(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \psi(x) (\vec{n}(x) \cdot e_i) d\sigma(x),$$

ou bien, en multipliant par e_i et en sommant sur tout les indices i ,

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \nabla \psi(x) dx = - \int_{\Omega} \psi(x) \nabla \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \psi(x) \vec{n}(x) d\sigma(x).$$

Dans ces deux expressions, \vec{n} est le vecteur normal sortant sur le bord de Ω .

Les intégrales de la proposition 2.8 sont bien définies :

- la première car les fonctions φ et $\partial_{x_i} \psi$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (ψ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$);
- la deuxième car les fonctions ψ et $\partial_{x_i} \varphi$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (φ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$);
- la troisième car les fonctions φ et ψ sont dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ (et n est bornée).

Démonstration. La preuve se fait en montrant la formule pour les fonctions régulières (dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$), puis en approchant les fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ par des fonctions régulières et en utilisant la continuité de chaque intégrale par rapport au couple (u, v) . \square

Définition 2.9. L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est le complété dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions régulières à support compact inclus dans Ω . On peut remarquer qu'il s'agit également de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est nulle.

L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'annulant sur le bord.

Proposition 2.10. Les espaces $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sont tout deux des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla \psi(x) dx.$$

On a donc deux espaces de Hilbert $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{L}^2(\Omega)$ munis chacun d'un produit scalaire qui leur est propre, avec $\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$, l'inclusion correspondant à une injection continue. De plus, pour la topologie de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (par exemple parce que l'espace des fonctions régulières est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$).

On est donc dans la situation où l'on a une injection continue et dense entre deux espace de Hilbert

$$V \subset H.$$

On sait, d'après le théorème de Riesz, qu'il est possible d'identifier l'espace de Hilbert H avec son dual par la correspondance

$$x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_H.$$

Nous allons voir qu'il faut prendre des précautions dans notre situation. Notamment, on ne peut pas identifier *simultanément* les espaces H et V à leurs duals respectifs. L'espace V s'injectant continuellement dans H , une forme linéaire sur H donne, par restriction à V une forme linéaire sur V . Par conséquent, on a une application $H' \simeq H \rightarrow V'$. Comme l'injection $V \subset H$ est dense, l'application $H \rightarrow V'$ est en fait une injection (une forme linéaire sur V se prolonge de manière unique à H), et on peut donc identifier H à un sous-espace de V' . On a donc la suite

$$V \subset H \subset V'.$$

Il est important de saisir que dans ce cas, V est vu comme un *sous-espace* de son dual V' , par l'identification

$$x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_H,$$

alors que l'identification classique $V \simeq V'$ se fait en utilisant l'identification $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_V$. De plus, l'espace H est dense dans V' . En effet, si x' est un élément de V' orthogonal à H , alors $\langle x', y \rangle_{V'} = 0$ pour tout élément y de H . Le théorème de Riesz donne l'existence d'un vecteur x tel que

$$\langle x', v \rangle_{V', V} = \langle x, v \rangle_V$$

pour tout vecteur v de V . On a alors, pour y dans H ,

$$0 = \langle x', y \rangle_{V'} = \langle x, y \rangle_{V, V'} = \langle x, y \rangle_H.$$

Le vecteur x est donc orthogonal dans H à tout vecteur de H , donc $x = 0$. On a donc $x' = 0$.

Dans notre cas, on a donc

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (\mathbb{H}^1(\Omega))' \text{ et } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (\mathbb{H}_0^1(\Omega))',$$

où chaque injection est continue et dense. L'ensemble $(\mathbb{H}_0^1(\Omega))'$ est noté $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. En vertu de la proposition suivante, les éléments de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ s'identifient naturellement à des dérivées de fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Proposition 2.11. *Soit u un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Alors, il existe $n + 1$ fonctions v_0, v_1, \dots, v_n (non uniques) de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telles que, pour tout φ dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$,*

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} v_0(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} v_1(x) \partial_{x_1} \varphi(x) dx + \dots + \int_{\Omega} v_n(x) \partial_{x_n} \varphi(x) dx. \quad (3)$$

De plus, toute expression de la forme (3) définit un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Cette proposition signifie en quelque sorte que $u = v_0 - \partial_{x_1} v_1 - \dots - \partial_{x_n} v_n$.

Démonstration. Soit u un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Par le théorème de Riesz appliqué dans l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on peut écrire u sous la forme

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \langle \psi, \varphi \rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}, \text{ pour tout } \varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

pour un certain élément ψ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. On a donc

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x) \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_{x_i} \psi(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx.$$

Il suffit alors de poser $v_0 = \psi$ et $v_i = \partial_{x_i} \psi$ pour $i = 1, \dots, n$, qui sont bien des éléments de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Pour montrer que l'expression (3) définit un élément de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, il suffit de remarquer que, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} v_0(x) \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$$

où $C = \|v_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ et

$$\left| \int_{\Omega} v_i(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx \right| \leq C \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$$

où $C = \|v_i\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. □

Proposition 2.12 (Inégalité de Poincaré). *On suppose que l'ouvert Ω est borné. Pour une fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité*

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Notamment, on a

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ce qui montre que $\|\nabla\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ est une norme pour l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

L'inégalité de Poincaré est bien évidemment fautive pour une fonction quelconque de $\mathbb{H}^1(\Omega)$: il suffit de prendre φ constante et non nulle, on a alors $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \neq 0$ mais $\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$.

Démonstration. On prouve l'inégalité pour une fonction régulière, le cas général se faisant en passant à la limite.

Soit φ une fonction \mathcal{C}^∞ sur Ω à support compact. On peut prolonger φ par 0 hors de Ω et obtenir ainsi une fonction régulière. On note $x = (x', x_n)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties selon la dernière coordonnée, on trouve

$$\int_{\Omega} \varphi(x', x_n)^2 dx = 2 \int_{\Omega} x_n \varphi(x', x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n) dx.$$

Il n'y a pas de terme de bord puisque φ est à support compact. Comme Ω est un ouvert borné, on a $|x_n| \leq C$ sur le support de Ω . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x', x_n)|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} |x_n| |\varphi(x', x_n)| |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)| dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi(x', x_n)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz, soit encore

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi(x', x_n)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla\varphi(x', x_n)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

□

3 Formulation variationnelle, estimations d'énergie, unicité

On va considérer dans cette partie l'équation de la chaleur dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n , sur un intervalle de temps $[0, T]$, avec condition nulle au bord (ou *conditions de Dirichlet homogène*). On cherche donc une solution au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(0, \cdot) = v. \end{cases} \quad (4)$$

Une étape importante pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles est de choisir le bon espace dans lequel les éventuelles solutions vont être cherchées. Pour l'instant, nous allons faire les calculs de manière formelle, puis nous allons observer dans quel espace doit être chaque terme pour donner un sens rigoureux au calcul.

Vu que l'on cherche une solution nulle sur le bord, l'espace naturel à considérer est l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de ce problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ en intégrant en espace et en intégrant par parties. En effet, la formule d'intégration par parties s'écrit dans un ouvert Ω comme

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème (4) est alors la suivante.

Définition 3.1. *Supposons que v est un élément de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que f est un élément de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.*

On dit qu'une fonction u est solution variationnelle au problème (4) si elle vérifie

- *u est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u$ est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;*
- *pour toute fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout $t \in]0, T[$*

$$\int_{\Omega} \partial_t u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx ; \quad (5)$$

- *la condition initiale de u est*

$$u(0, \cdot) = v.$$

Quelques remarques :

- Pour un espace de Hilbert H , l'espace $\mathbb{L}^2(]0, T[, H)$ est défini comme l'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions u de $]0, T[$ dans H telles que

$$\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < \infty ;$$

- Si H est un espace de Hilbert, et H' est son dual, pour deux fonctions u et v appartenant respectivement aux espaces $\mathbb{L}^2(]0, T[, H)$ et $\mathbb{L}^2(]0, T[, H')$, on peut définir la quantité

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{H, H'} dt ;$$

- La formulation variationnelle prend cette forme après intégration par parties car la quantité

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx$$

s'annule pour $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$;

- La troisième condition à un sens en vertu du lemme 3.2 suivant ;
- Les hypothèses de régularité sur chaque terme correspondent à des hypothèses naturelles pour donner un sens à la formulation (5).

Lemme 3.2. Soit u une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ telle que $\partial_t u$ soit dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Alors u s'identifie à une fonction de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega))$ vérifiant

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 - \|u(0, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} u(t, x) \partial_t u(t, x) dx dt.$$

Démonstration. Admis (une preuve peu être trouvée dans [3], lemme 1.2, page 260). \square

Le lemme 3.2 permet d'obtenir de la régularité en le couple (t, x) à partir d'hypothèse de régularité en x et en t . En effet, l'espace $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ est un espace de fonctions régulières en espace mais pas forcément en temps, alors qu'une fonction vérifiant $\partial_t u \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ est régulière en temps mais pas forcément en espace. La conclusion du lemme donne une régularité modérée en chacune des variables.

Théorème 3.3. Le problème (4) admet une unique solution variationnelle u au sens de la définition 3.1. De plus, si la fonction f est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$, alors la fonction u vérifie, pour une certaine constante $C > 0$, l'inégalité suivante, appelée estimation a priori,

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds. \quad (6)$$

Démonstration. On commence tout d'abord par montrer l'estimation a priori (6) si le second membre f est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$. Soit u une solution de la formulation variationnelle. On peut prendre, pour tout t , φ la fonction $u(t, \cdot)$ comme fonction test. On obtient alors la relation

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(t, x) u(t, x) dx,$$

vraie pour presque tout t . Or on a, par Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, (la valeur de $C > 0$ change de ligne en ligne)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(t, x) u(t, x) dx &\leq \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + C \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On a donc

$$\partial_t \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t , on obtient

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq C \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds.$$

Montrons maintenant l'unicité de la solution. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u_1 - u_2$ est solution variationnelle de l'équation de la chaleur avec $v = 0$ et $f = 0$. La fonction nulle f est bien dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ et l'estimation a priori est donc vérifiée dans ce cas, où elle se récrit

$$\|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_1(s, \cdot) - \nabla u_2(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq 0,$$

pour tout $t > 0$. Donc $u_1(t, \cdot) = u_2(t, \cdot)$ pour tout $t > 0$.

Il reste maintenant à montrer l'existence de la solution. On va tout d'abord prouver l'existence d'une solution sous l'hypothèses $f \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$. On va pour cela utiliser une méthode de Galerkin, c'est à dire que l'on va utiliser un problème approché de dimension fini, qui aura une unique solution, et on va montrer que la solution du problème approché converge. La limite obtenue sera une solution du problème initial.

L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert séparable, il admet une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut alors considérer les espaces $V_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, qui sont des approximations de l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Notamment l'union $\bigcup_n V_n$ est dense dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

On s'intéresse alors une solution u_n au problème approché suivant, qui a le bon goût d'être de dimension finie :

$$\int_{\Omega} \partial_t u_n(t, x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(x) dx, \text{ pour tout } \varphi \in V_n \quad (7)$$

avec u_n dans $\mathcal{C}([0, T], V_n)$ et $u_n(0, \cdot) = v_n$, où (v_n) est une suite telle que $v_n \in V_n$ et $v_n \rightarrow v$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En réalité, comme l'espace V_n est de dimension finie, u_n est une solution du problème approché si et seulement si (7) est vérifiée pour $\varphi = e_0, e_1, \dots, e_n$. En décomposant $u_n(t, \cdot)$ sur la base (e_0, e_1, \dots, e_n) ,

$$u_n(t, \cdot) = \sum_{k=0}^n c_k^n(t) e_k,$$

on obtient le système de n équations différentielles linéaires à n inconnues suivant :

$$\sum_{k=1}^n \partial_t c_k^n(t) \int_{\Omega} e_l(x) e_k(x) dx + \sum_{k=1}^n c_k^n(t) \int_{\Omega} \nabla e_l(x) \nabla e_k(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) e_l(x) dx, \text{ pour } l = 1, \dots, n,$$

dont les conditions initiales sont données par la décomposition de v_n sur la base (e_0, \dots, e_n) . Ce système prend la forme

$$M \partial_t \mathbf{c}_n(t) + A \mathbf{c}_n(t) = \mathbf{f}(t).$$

Comme la matrice M est définie positive, le système a une unique solution.

Il reste maintenant à montrer que la suite (u_n) a une limite quand n tend vers l'infini, et que cette limite est solution du problème initial. De la même manière que l'on a prouvé l'estimation a priori, on montre

$$\|u_n(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_n(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \|v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds.$$

La suite u_n est donc bornée dans les espaces $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega))$ et $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. On peut donc en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle qu'on ait les convergences

$$\int_{\Omega} \partial_t u_n(t, x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} \partial_t u(t, x) \varphi(x) dx \text{ et } \int_{\Omega} \nabla u_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} \nabla u_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx \quad (8)$$

quelle que soit la fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, pour un certain u de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ avec $\partial_t u$ dans $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Le raisonnement est basé sur le théorème de Banach-Alaoglu (voir par exemple [1]), qui dit que d'une suite bornée φ_n dans un espace dual E' on peut extraire une sous-suite (φ_{n_k}) telle que, pour un certain φ , la suite de réels $\varphi_{n_k}(x)$ converge vers $\varphi(x)$ pour tout x de E (on dit que φ_n converge faiblement vers φ). Ici, les espace considérés peuvent être vus comme des duaux :

$$\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega)) = (\mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega)))' \text{ et } \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega)) = (\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega)))'.$$

la convergence souhaitée (8) n'est pas exactement celle obtenue à partir du théorème de Banach-Alaoglu, on pourra trouver les détails de la démonstration dans [2], partie 11. En passant à la limite dans la formulation variationnelle, on voit que la limite est également solution du problème initial.

Il reste enfin à montrer l'existence dans le cas général $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $f \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.

Pour cela, on considère une suite (v_n) de fonctions de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ convergeant dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers v , et une suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ convergeant vers f dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Le problème associé à v_n et f_n a une unique solution u_n . □

Le point à retenir de cette démonstration est que, l'équation étant *linéaire*, il suffit de montrer que les solutions approchées restent bornées (dans un bon espace de fonctions) pour pouvoir en extraire une sous-suite (faiblement) convergente, par le théorème de Banach-Alaoglu. C'est là tout l'intérêt d'avoir une formulation *faible* au problème, puisqu'on peut ensuite passer à la limite dans la formulation faible.

L'estimation du théorème 3.3 permet de montrer que l'équation de la chaleur est dissipative, autrement dit, si $f \equiv 0$ (absence de source de chaleur), alors la température décroît. Plus précisément :

Corollaire 3.4. *Soit u une solution de (4) avec $f = 0$, et $t_1 \geq 0$ tel que $u(t_1, \cdot)$ ne soit pas uniformément nulle. Alors $\|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} < \|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ pour tout $0 < t_1 < t_2$.*

Démonstration. $\|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 - \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds$. On donc l'inégalité large. De plus, si on suppose $\|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, on a

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = 0$$

pour $t_1 < t < t_2$. La fonction $u(t, \cdot)$ est donc constante pour tout $t_1 < t < t_2$, et est donc nulle puisque elle est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Ceci contredit $u(t_1, x) \neq 0$. □

4 Principe du maximum

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que les solutions variationnelles de l'équation de la chaleur présente naturellement des stabilités au sens des normes Hilbertiennes $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}$.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'équation de la chaleur a également de bonne propriétés vis à vis de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}$.

Proposition 4.1 (Positivité). *Soit v une fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et f une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ qui soient strictement positives respectivement sur Ω et $]0, T[\times \Omega$. Alors, la solution variationnelle u de (4) est positive presque partout dans $\Omega \times [0, T]$.*

Démonstration. On note $u^-(t, x) = \min(0, u(t, x))$ la partie négative de u et $Q = \text{supp } u^-$ le support de u^- qui est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $u^- = 0$ presque partout. Notre but est donc de démontrer que u^- est nul.

Tout d'abord, comme u est dans l'espace $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ par la définition 3.1, on peut voir que $u^-(t, \cdot)$ est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ pour presque tout $t > 0$ (voir feuille d'exercice) et le gradient de u^- est donné par

$$\nabla u^- = \mathbf{1}_Q \nabla u,$$

qui est bien dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. De même, on a

$$\partial_t u^- = \mathbf{1}_Q \partial_t u.$$

Pour tout v de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout t

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx.$$

En prenant successivement $v = u^-(t, \cdot)$ pour $t > 0$, on obtient pour presque tout $t > 0$

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x) u^-(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla u^-(t, x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx,$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla u^-(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx \leq 0$$

En intégrant en temps, on obtient

$$\int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |v^-(t, x)|^2 dx = 0$$

car $v \geq 0$. Donc $u^-(t, x) = 0$. □

Théorème 4.2 (Principe du maximum). *On suppose que le second membre f est nul dans le problème (4). Alors la solution variationnelle vérifie*

$$\min(0, \inf_{x \in \Omega} v(x)) \leq u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$$

presque partout dans $\Omega \times [0, T]$.

Démonstration. On pose $K = \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$ et $w = K - u$. La fonction w est alors dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ mais pas dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. En revanche, la fonction $w^-(t, x) = \min(0, w(t, x))$ est bien dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, car $u|_{\partial\Omega} = 0$ et la constante K est positive, on a donc $w|_{\partial\Omega} = (K - u)|_{\partial\Omega} = K \geq 0$. Notre but est de montrer que la fonction w est positive, c'est à dire, que $w^- = 0$.

On peut appliquer la formulation variationnelle avec la fonction $w^-(t, \cdot)$, et on obtient, pour presque tout $t > 0$, (on a $\nabla w = -\nabla u$ et $\partial_t w = -\partial_t u$)

$$\int_{\Omega} \partial_t w(t, x) w^-(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla w(t, x) \cdot \nabla w^-(t, x) dx = 0,$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{2} \partial_t \left(\int_{\Omega} |w^-|^2(t, x) dx \right) = - \int_{\Omega} |\nabla w^-(t, x)|^2 dx \leq 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\int_{\Omega} |w^-(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |w^-(0, x)|^2 dx = 0,$$

par construction. On a donc $w^- = 0$. C'est à dire $u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$. Par un raisonnement symétrique, on prouve l'autre inégalité. □

Ce résultat donne la stabilité pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}$ de l'équation de la chaleur.

Corollaire 4.3. *Si v est dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, alors $u \in \mathbb{L}^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et*

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0.$$

5 Méthodes de différences finies pour l'équation de la chaleur

Dans cette partie, on présente un schéma de discrétisation pour l'équation de la chaleur.

On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times [0, \infty[\\ u(0, \cdot) = v & v \text{ continue bornée.} \end{cases} \quad (9)$$

On discrétise $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ en une grille de pas k en temps et h en espace. On note $x_j = jh$ et $t^n = nk$ pour j dans \mathbb{Z} et n dans \mathbb{N} . Les méthodes de différences finies consistent à calculer une approximation u_j^n de $u(t^n, x_j)$ en remplaçant les dérivées partielles par des taux d'accroissements. On utilise notamment les *différences progressives* (en anglais *forward*)

$$\delta_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h},$$

et les *différences rétrogrades* (en anglais *backward*)

$$\bar{\delta}_x u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}.$$

La discrétisation en temps se fera toujours de manière progressive, en raison de la dissymétrie entre les deux directions du temps :

$$\delta_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}.$$

La méthode d'Euler explicite consiste à approcher la solution de l'équation de la chaleur par le schéma

$$\begin{cases} \delta_t u_j^n &= \delta_x \bar{\delta}_x u_j^n, \text{ pour } (j, n) \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ u_j^0 &= v(x_j), \text{ pour } j \text{ dans } \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (10)$$

L'utilisation de la discrétisation $\delta_x \bar{\delta}_x$ est justifiée par le fait que le Laplacien est invariant par retournement de l'espace; il est donc naturel de l'approcher par un opérateur symétrique en espace, ce qui est bien le cas de l'opérateur $\delta_x \bar{\delta}_x$. On remarque notamment que $\delta_x \bar{\delta}_x = \bar{\delta}_x \delta_x$. Le schéma (10) se réécrit

$$\frac{1}{k}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

On note $\lambda = k/h^2$; le schéma se réécrit

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j+1}^n + (1 - 2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n \stackrel{def}{=} (E_\lambda(u^n))_j.$$

On obtient alors la suite u^n en itérant n fois l'opérateur E_h à partir de la suite u^0 . On a donc $u^n = E_h^n u^0$. On peut contrôler u^{n+1} par u^n . En effet, si on suppose $\lambda \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq \lambda |u_{j+1}^n| + (1 - 2\lambda)|u_j^n| + \lambda |u_{j-1}^n| \\ &\leq (\lambda + 1 - 2\lambda + \lambda) \sup_l |u_l^n| \\ &\leq \sup_l |u_l^n|. \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité

$$\|u_j^{n+1}\|_{l^\infty} \leq \|u_j^n\|_{l^\infty} \leq \|v(x_j)\|_{l^\infty},$$

en notant $\|w\|_{l^\infty} = \sup_j |w_j|$, pour une suite bornée (w_j) . On dit que le schéma numérique est stable. On retrouve l'analogue de la stabilité dans \mathbb{L}^∞ de la solution du problème continu.

Si en revanche on suppose $\lambda > 1/2$, le schéma n'est plus stable comme le montre l'exemple suivant. Choisissons $u_j^0 = (-1)^j$.

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \lambda(-1)^{j+1} + (1 - 2\lambda)(-1)^j + \lambda(-1)^{j-1} \\ &= (-\lambda + 1 - 2\lambda - \lambda)(-1)^j \\ &= (1 - 4\lambda)(-1)^j. \end{aligned}$$

On a donc $u_j^n = (1 - 4\lambda)^n (-1)^j$. Comme $1 - 4\lambda < -1$ la suite $\|u^n\|_{l^\infty}$ tend vers ∞ . Le schéma est dit instable.

Nous allons maintenant étudier la convergence du schéma (10) vers la solution de l'équation de la chaleur. On suppose que la vraie solution u est suffisamment régulière (de classe \mathcal{C}^4 par exemple). On va faire un développement de Taylor de la solution pour contrôler l'erreur de discrétisation, c'est-à-dire la quantité

$$\varepsilon_j^n = \delta_t u(t^n, x_j) - \delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j).$$

On a

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \delta_t u(t^n, x_j) - \delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) \\ &= (\delta_t u(t^n, x_j) - \partial_t u(t^n, x_j)) - (\delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) - \partial_x^2 u(t^n, x_j)). \end{aligned}$$

En faisant des développements de Taylor, on obtient

$$\delta_t u(t^n, x_j) = \frac{1}{k} (u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)) = \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{k}{2} \partial_t^2(\tilde{t}^n, x_j),$$

pour un certain \tilde{t}^n dans $[t^n, t^{n+1}]$ et

$$\delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) = \frac{1}{h^2} (u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(x_{j-1}, t^n)) = \frac{h^2}{24} (\partial_x^4 u(\tilde{t}^n, x_j) + \partial_x^4 u(\bar{t}^n, x_j)),$$

pour un certain \tilde{x}_j de $[x_j, x_{j+1}]$ et \bar{x}_j de $[x_{j-1}, x_j]$.

En conséquence,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_{l^\infty} &\leq \frac{k}{2} \sup_{[t^n, t^{n+1}]} |\partial_t^2 u(\cdot, x_j)| + \frac{h^2}{12} \sup_{[x_{j-1}, x_{j+1}]} |\partial_x^4 u(t^n, \cdot)| \\ &\leq C_\lambda h^2 \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \|\partial_x^4 u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que u est solution de l'équation de la chaleur.

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soit u une solution de l'équation de la chaleur (9) et soit u^n la solution approchée obtenue par le schéma (10). Supposons que le rapport $\lambda = k/h^2$ vérifie la condition de stabilité $\lambda \leq 1/2$. Si la condition initiale v est de classe C^4 sur \mathbb{R} , et que v et ses dérivées sont bornées, alors, il existe une constante C telle que*

$$\|u^n - \bar{u}^n\|_{l^\infty} \leq C t^n h^2 \|v^{(4)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})},$$

où $\bar{u}_j^n = u(t^n, x_j)$ est la solution exacte à l'instant t^n .

Démonstration. On a

$$\delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) - \delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) = \delta_t \bar{u}_j^n - \delta_x \bar{\delta}_x \bar{u}_j^n = \varepsilon_j^n.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} - u_j^{n+1} &= \bar{u}_j^n - u_j^n + k \delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) \\ &= \bar{u}_j^n - u_j^n + k \delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) - k \delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) + k \delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) \\ &= E_\lambda(\bar{u}^n - u^n)_j + k \varepsilon_j^n. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc

$$\bar{u}_j^n - u_j^n = E_\lambda(\bar{u}^0 - u^0)_j + k \sum_{q=1}^n E_\lambda^q(\varepsilon_j^{n-q}) = k \sum_{q=1}^n E_\lambda^q(\varepsilon_j^{n-q}).$$

Sous la condition de stabilité $\lambda \leq \frac{1}{2}$, on a montré que l'opérateur E_λ vérifiait, pour une suite bornée (v_j) , l'inégalité $\|E_\lambda v\|_{l^\infty} \leq \|v\|_{l^\infty}$. On en conclut

$$\|\bar{u}^n - u^n\|_{l^\infty} \leq k \sum_{q=1}^n \|\varepsilon^{n-q}\|_{l^\infty} \leq C_\lambda n k h^2 \sup_{(t,x) \in [0, t^{n+1}] \times \mathbb{R}} |\partial_x^4 u(t, x)| \leq C_\lambda t^n h^2 \|v^{(4)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})},$$

puisque $\partial_x^4 u$ vérifie l'équation de la chaleur, et donc le principe du maximum. □

6 Bibliographie

Références

- [1] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, 1983. In French.
- [2] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. North Holland, Amsterdam, 1979.