Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

TD0 : Ensembles, applications, logique

Exercice 1.
Montrer les égalités ensemblistes suivantes (A et les B_i sont des sous-ensembles d'un certain ensemble E) :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B \ ; \ \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$$

Exercice 2.
Donner un expression des ensembles suivants en utilisant les signes $\cap$ et $\cup$:

$$\{x \in E,\ \forall i \in I,\ x \in A_i\} \text{ et } \{x \in E,\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Que peut-on dire de deux sous-ensembles B et C de E vérifiant

$$\forall i \in I,\ B \subset A_i \ \texttt{et}\ A_i \subset C \ ?$$

Exercice 3.
Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ et $B \subset F$ deux ensembles. Comparer les ensembles A et $f^{-1}(f(A))$, ainsi que les ensembles B et $f(f^{-1}(B))$.

Exercice 4.
On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi, et que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi. Donner un exemple ou $g \circ f$ est bijective sans que g ne soit injective, ni f surjective.

Exercice 5.
Donner les négations des propositions suivantes :

$$\forall x \in I,\ x \leq a \ ;$$
$$\forall x \in E,\ (x \in A \ \texttt{ou}\ x \in B) \ \texttt{et}\ x \in C \ ;$$
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq C \ ;$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \in A) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2) \ ;$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R},\ (|x - y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) \ ;$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n| \leq \varepsilon).$$

Exercice 6.
Y a-t-il une implication entre les deux propositions

$$\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ P(x, y), \quad \text{et} \quad \exists y \in B,\ \forall x \in A,\ P(x, y),$$

où $P(x, y)$ est une proposition donnée ?

Exercice 7.
Écrire la réciproque et la contraposée de l'implication suivante (n est un entier naturel).

$$(\exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{N},\ n = 2q).$$

Parmi les propositions écrites, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses.

Exercice 8.
Montrer les propositions suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k + 1) \Rightarrow \big(\exists q \in \mathbb{N},\ n^2 = 2q + 1\big) \ ;$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big(\exists k \in \mathbb{N},\ n^2 = 2k\big) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{N},\ n = 2q)\,.$$

Exercice 9.
Que pensez-vous des deux propositions suivantes ?

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \big[(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x > a) \Rightarrow a < 0\big]$$
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x > a \Rightarrow a < 0)\,.$$