Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

TD1 : récurrence, nombres réels

Exercice 1.
Montrer les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

Exercice 3.
Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

- On veut montrer par récurrence la propriété suivante : un groupe de n personnes étant donné, ces personnes sont toutes de même sexe.
- La propriété est vraie au rang 1 : un groupe d'une personne est composé soit d'un homme, soit d'une femme.
- On suppose la propriété vraie au rang n. On considère alors un groupe de $n+1$ personnes dont on distingue deux personnes a et b. En écartant a, on obtient un groupe de n personnes qui sont donc (hypothèse de récurrence) toutes de même sexe. b est donc de même sexe que les $n-1$ autres personnes. De même, en écartant b, on montre que a est de même sexe que les $n-1$ autres. La propriété est démontrée au rang $n+1$.

Exercice 4.
Soit x un réel tel que pour tout entier naturel n, on ait $|x| \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 5.
Déterminer les bornes supérieures (resp. inférieures) des ensembles suivants si elles existent, et dire si ce sont des plus grands (resp. plus petits) éléments :

$$\left\{\frac{n+1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ;\ \left\{\sqrt{\frac{2n^2}{(n+2)(n+1)}},\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ;\ \left\{\frac{n}{nm+1},\ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\}.$$

Exercice 6.
Soient A et B deux sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété :

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 7.
Soient A et B deux sous-ensembles non-vides bornés de $\mathbb{R}$. Montrer les relations :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B)\ ;\ \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A,\ \sup B)\ ;\ A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B.$$

Exercice 8.
Soit A un sous-ensemble borné non-vide de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{x \in \mathbb{R},\ -x \in A\}$. Montrer que $\sup(-A) = -\inf A$ et $\inf(-A) = -\sup A$.

Exercice 9.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in A,\ \sup A - x \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 10.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que $\sup A \notin A$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]\sup A - \varepsilon, \sup A[$ contient une infinité d'éléments.

Exercice 11.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour f et g dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, on a

$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g \quad \text{et} \quad \inf_A (f+g) \geq \inf_A f + \inf_A g.$$

Donner un cas où les inégalités ci-dessus sont strictes. On fera attention de vérifier que toutes les quantités écrites ont un sens. Pour $f, g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, on pose

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Pourquoi la quantité $d(f, g)$ est-elle bien définie ? Montrer que si f, g et h sont trois fonctions de $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, alors

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Exercice 12.
On va chercher à classifier les sous-groupes de $\mathbb{R}$. On considère donc G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et on va différencier selon deux cas. On suppose que $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que le réel $\alpha = \inf G \cap]0, \infty[$ est bien défini.
2. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose $\alpha = 0$. Montrer que pour tout réel x et tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble $G \cap [x, x + \varepsilon]$ est non vide. On dit que G est *dense* dans $\mathbb{R}$.
4. On s'intéresse à l'ensemble $G_\lambda = \{n + k\lambda,\ (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Que peut on dire de G_λ en fonction de λ, au vu des questions précédentes ?

Exercice 13.
Soit $f\ :\ [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0, 1],\ x \leq f(x)\}$ admet une borne supérieure α. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.