Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

TD2 : suites

Exercice 1.
Montrer que de toute suite non majorée on peut extraire une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.
Montrer qu'une suite convergente à valeurs entières est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 3.
Étudier la convergence les suites de terme général

$$\frac{\sin(n^2)+n^2}{(1+n+e^{-\sqrt{n}})^3} \quad ; \quad \frac{(1+n)^4-(1-n)^4}{\sqrt{15+n^2+n^5}} \quad ; \quad \frac{n^2+n\log^3(n)}{ne^{-\sqrt{n}}-n(2n+1)}$$

$$\frac{(n-\sin(n))(2n+1)}{\sqrt{n^4+e^{-n}}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)(n-2)}}{\sin(n)+2e^{-\frac{1}{n}}} - \frac{n\log(n^2)+\sqrt{n}}{\sqrt{1+n^{-n}}}$$

Exercice 4.
Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$\frac{E(nx)+E((n+1)x)+\ldots+E(2nx)}{n^\alpha},$$

en fonction de α.

Exercice 5.
Montrer que les suites définies par les relations de récurrence suivantes sont bien définies, et étudier leur comportement asymptotique.

$$u_0=1,\ u_{n+1}=\frac{\sin(u_n)}{2+u_n+2u_n^2} \quad ; \quad u_0=1,\ u_{n+1}=\sin\left(\frac{u_n}{2u_n+n}\right) \quad ; \quad u_0=1,\ u_{n+1}=u_n+\frac{u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Exercice 6.
Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par une relation de récurrence affine de la forme

$$u_0\in\mathbb{R},\ u_{n+1}=au_n+b.$$

On pourra discuter selon la valeur de a.

Exercice 7.
Étudier la convergence des suites de terme général

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!.$$

Exercice 8.
Soit α un réel strictement plus grand que 1. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{(2n)^\alpha}+\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\leq\frac{1}{2^{\alpha-1}n^\alpha}.$$

Montrer que la suite de terme général $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n\leq v_{2n+1}\leq\frac{1}{2^{\alpha-1}}v_n+1,$$

et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

sont adjacentes. En déduire une approximation de e à 10^{-4} près.

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Quelle hypothèse supplémentaire permettrait de conclure ?

Exercice 11.
Soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel (avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Montrer que les suites $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ∞.

Exercice 12.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ est convergente et que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_n u_n.$$

Donner un exemple de suite (u_n) non convergente telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 13.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation, dite de *sous-additivité*,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1. Montrer que pour tous entiers n et p, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{\max(u_0, \ldots, u_{p-1})}{n}$$

   (on pourra faire la division euclidienne de n par p).

2. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf_n \frac{u_n}{n} \in [-\infty, \infty[$ (on pourra considérer un entier p bien choisi).

3. En déduire un résultat analogue pour les suites à valeurs dans $]0, \infty[$ vérifiant

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p u_q.$$

Exercice 14.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to_n 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.