Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

TD3 : séries

Exercice 1.
Donner la nature des séries suivantes, et calculer la somme des éventuelles séries convergentes.

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \ ; \ \sum e^{-n} \ ; \ \sum \ln(1+1/n) \ ;$$

$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!} \ ; \ \sum 3^n \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{n+1}}\right) \ ; \ \sum \frac{1}{n} \ ;$$

$$\sum \frac{1}{\ln n} \ ; \ \sum \frac{\cos n}{2^n} \ ; \ \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}.$$

Exercice 2.
Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^a$ converge pour tout $a \geq 1$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum u_n^a$ diverge pour tout $a < 1$.
3. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Exercice 3.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ converge. On notera $0.a_1a_2a_3\ldots$ sa limite. Combien vaut $0.999\ldots$? Sous quelle condition les réels $0.a_1a_2a_3\ldots$ et $0.b_1b_2b_3\ldots$ sont-ils égaux ?

Exercice 4.
Soit $\sum u_n$ une série divergente dont le terme général est positif. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{\sum_{k=0}^n u_k}$ diverge.

Exercice 5.
Soit u_n une suite décroissante de nombres réels positifs.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_n nu_n = 0$. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge. Comparer les sommes de ces deux séries.
3. Comparer les natures des séries

$$\sum u_n \ ; \ \sum n u_{n^2} \text{ et } \sum 2^n u_{2^n}.$$

Exercice 6.
On considère la suite $u_n = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ est absolument convergente (on utilisera le développement limité en 0 suivant : $\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$).
2. En déduire que u_n converge et qu'il existe une constante C[1] telle que

$$u_n \sim Ce^{-n}n^n\sqrt{n}.$$

[1] En fait, on a $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 7.
Donner la nature des séries suivantes (a et b sont des réels strictement positifs).

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \;;\; \sum \frac{n!}{n^n} \;;\; \sum \frac{a^n}{1+b^n} \;;\; \sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \;;\; \sum \frac{n}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)} \;;\; \sum \frac{1}{n}\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 8.
Donner un équivalent à $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 1$.

Exercice 9.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$? En utilisant le fait que la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ converge, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 10.
Donner la nature des séries données par

$$\sum \alpha^n n^\beta (\ln n)^\gamma$$

en fonction des réels α, β et γ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 11.
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$?

Exercice 12.
Montrer l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq e \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!N}.$$

En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 13.
Donner un équivalent à la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$, pour t tendant vers 1.

Exercice 14.
Que peut on dire du produit de Cauchy de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même ? On rappelle que le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

Exercice 15.
Montrer la formule

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{p+n-1}^n z^n,$$

où z est un complexe vérifiant $|z| < 1$.

Exercice 16.
Soit z et z' deux nombres complexes.

1. Montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On notera sa somme e^z.
2. Montrer que $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.