Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

TD4 : Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1.
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x},\ g(x) = \frac{1}{x^2 + 2\cos(\theta)x + 1},\ h(x) = \cos(2x)e^x \text{ et } k(x) = \sin(x)e^{2x}(x^2 - x).$$

Exercice 2.
Déterminer la droite asymptote en $x = \infty$ des fonction suivantes, et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{1 - x^2},\ \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + x - 1}}{\sqrt{x^3 - x}},\ x^2\ln(x) - x^2\ln(1+x).$$

Exercice 3.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)},\ \sin(e^x - 1),\ \tan(x),\ \sqrt{\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}},\ (\cos(x))^{\sin(x)}.$$

Exercice 4.
Trouver de trois manières différentes le développement limité à l'ordre 5 de la fonction tan. On pourra utiliser la définition de la fonction tan, utiliser l'expression de sa dérivée, où encore inverser la fonction arctan.

Exercice 5.
Donner les limites en $x = 0$ des expressions suivantes :

$$\frac{\ln(1+2x) - \sin(x)}{e^{3x} - 1},\ \frac{e^x - \cos(2x)}{\tan(2x) - \sin(x)},\ \frac{\sqrt{x^2 + x^3} - x - x^2/2}{\ln(1+x) - \sin(x - x^2/2)},\ \frac{\cos(x)^x - 1}{\sin(x) - x} - 1,\ x^{\sin(x)},\ \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 6.
Montrer que la fonction $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ peut se prolonger par continuité en 0. Le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7.
Trouver la limite en $x = 0$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))}{\arctan(\arcsin(x)) - \arcsin(\arctan(x))}$$

(cet exercice peut se faire sans trop de calculs *si on s'y prend bien*).

Exercice 8.
Soit $\alpha > 0$ et $u_0 \neq 0$ deux réels. Montrer que la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - \alpha}{2u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n}$$

définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. Donner une majoration de $u_n - \lim_k u_k$ quand n tend vers l'infini (éventuellement en supposant $|u_0 - \lim_n u_n|$ assez petit).

Exercice 9.
Soit n un entier supérieur ou égal à trois. Montrer que l'équation $e^x = nx$ a deux solutions réelles $a_n < b_n$. Quel sont les comportements asymptotiques de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 10.
Caractériser les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Et si on suppose seulement f continue en 0 ? Même question pour les équations

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ f(xy) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y)$$

(pour les deux dernières, on prendra f de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, et on considérera le point 1 plutôt que 0).

Exercice 11.
Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en aucun point ; en un seul point. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est un rationnel (écrit sous forme de fraction irréductible)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais en aucun point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 12.
On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

pour une certaine constante positive k (on dit que f est *k-Lipschitzienne*, ou simplement que f est *Lipschitzienne*). On suppose de plus que $k < 1$.

1. On définit, pour x_0 un réel donné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ;

2. En déduire qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$;

3. La conclusion précédente est elle toujours valide si f va de I dans I, où I est un intervalle ouvert ? fermé ?

Exercice 13.
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est continue mais pas uniformément continue. Montrer que la fontion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\sqrt{x}$ est uniformément continue, mais pas Lipschitzienne.

Exercice 14.
Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors on peut trouver deux constantes réelles a et b telles que $|f(x)| \leq a|x| + b$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15.
Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si il existe une fonction ω de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ telle que $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$ et que pour tous réels x, y, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Retrouver à partir de cela le fait que les fonctions Lipschitziennes sont uniformément continues.

Exercice 16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Est-elle dérivable ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 17.
Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 18.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

Exercice 19.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. Montrer que l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2 \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| \right)^{\frac{1}{2}}$$

(on pourra commencer par montrer $|f'(x)| \leq h \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{1}{h} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$ quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).

Exercice 20.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que P' est également scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont comprises entre la plus petite et la plus grande racine de P. Montrer que si les racines de P sont distinctes, alors les racines de P' le sont aussi.

Exercice 21.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0. Quelle est la limite de

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \ ?$$

Et celle de

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \ ?$$

Exercice 22.
Soit f une fonction dérivable en tout point de $[0,1]$. On suppose $f'(0) < f'(1)$. Pour α un élément de $]f'(0), f'(1)[$ et $x \in [0,1]$, on pose $g_\alpha(x) = f(x) - \alpha x$. Montrer que g_α est continue sur $[0,1]$ et que son minimum n'est atteint ni en 0 ni en 1. En déduire que la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 23.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t)$. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.