

TD5 : Trigonométrie

Exercice 1.

Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$$\cos(2x)\sin(3x), \quad \cos(4x), \quad \sin(5x).$$

Exercice 2.

Exprimer les fonctions suivantes à partir de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(y)$ et $\cos(y)$.

$$\cos(2x - y)\sin(x + y), \quad \cos(3x + y)\sin^2(x - y).$$

Exercice 3.

Linéariser les expressions suivantes :

$$\cos^4(x), \quad \sin^3(x), \quad \cos(x)^3 \sin^2(x).$$

Exercice 4.

Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x)$:

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+1}, \quad \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^4(x)}, \quad \cos^4(x) - \cos(x)\sin^3(x).$$

Exercice 5.

Donner une expression des fonctions suivantes en fonction de $\tan(x/2)$:

$$\frac{1}{\cos(x) + \tan(x)}, \quad \frac{1 + \cos^3(x)}{\cos^2(x)}, \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}.$$

Exercice 6.

Calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer un changement de variables trigonométrique : $u = \sin(x)$, $u = \cos(x)$, $u = \tan(x)$, ou $u = \tan(x/2)$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx, \quad \int_0^a \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Exercice 7.

Simplifiez la somme

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Exercice 8.

Montrer l'égalité

$$2^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{\sin(x)}.$$

Exercice 9.

Montrer que

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n) = 2^n \cos(a_1) \cos(a_2) \dots \cos(a_n),$$

où $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n)$ désigne la somme sur tout les choix de signes possibles.