Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

Devoir
Durée : 2 heures 30

Les parties I, II et III sont indépendantes. Si besoin, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour le réutiliser dans une question ultérieure.

Partie I

Pour cette partie, on rappelle les développements limités suivants : si $\varepsilon_n \to 0$, alors

$$\ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\varepsilon_n} = 1 - \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3).$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$$

1. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
3. En déduire que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera sa limite γ.
5. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
6. Montrer que l'inégalité
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(n-1)^2}$$
est vérifiée pour tout entier $n \geq 2$. On pourra comparer la série $\sum \frac{1}{n^3}$ à une intégrale.
7. Montrer le développement asymptotique
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Partie II

On s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(n^\alpha \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\alpha < 0$, alors la suite $(n^\alpha \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 0$, correspondant à la suite de terme général $\sin(n)$.
   (a) La suite complexe $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est elle de Cauchy ?
   (b) On suppose que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer alors que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on pourra s'intéresser à la suite $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$).
   (c) En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
3. Soit x un réel irrationnel et N un entier naturel non-nul.
   (a) Montrer qu'il existe $N+1$ éléments distincts de $[0,1[$ de la forme $a + bx$ avec a et b entiers et $0 \leq b \leq N$.

(b) En déduire qu'il existe deux entiers relatifs n et m tels que

$$|n - mx| \leq \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad |n| \leq 1 + xN. \tag{1}$$

(c) Montrer que dans (1), on peut supposer n positif.

4. Montrer que pour tout nombre réel θ et tout entier N, il existe deux entiers relatifs n et m tels que $|n + 2m\pi - \theta| \leq \frac{1}{N}$ et $n \geq 0$.

5. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

6. Montrer que si $0 < \alpha < 1$, alors 0 est une valeur d'adhérence de $(n^\alpha \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Pour $\alpha > 0$, que valent $\liminf_n n^\alpha \sin(n)$ et $\limsup_n n^\alpha \sin(n)$?

Partie III

1. On considère une suite à double indice $(u_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ telle que $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, et on note $l_n = \lim_p u_n^p$.

1-1. i. Dans cette question, on suppose que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$0 \leq u_n^p \leq u_n^{p+1}. \tag{2}$$

En supposant que la série $\sum l_n$ converge, montrer que la série $\sum_n u_n^p$ converge également.

ii. Montrer que la suite $(\sum_{n=0}^\infty u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite éventuellement infinie.

iii. Dans cette question, on suppose que $\sum l_n$ ne converge pas. Montrer que pour tout réel $M > 0$, il existe un entier N tel que

$$\sum_{n=0}^{N} l_n \geq M.$$

iv. Dans cette question, on suppose que $\sum l_n$ converge. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N tel que

$$\sum_{n=0}^{N} l_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} l_n - \varepsilon.$$

v. En déduire dans tous les cas (convergence ou non de la série $\sum l_n$) l'égalité

$$\lim_p \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} l_n.$$

1-2. Dans cette question, on suppose $u_n^p \geq 0$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ (mais on ne suppose plus l'inégalité (2) vérifiée). Montrer que $\sum_{n=0}^\infty \inf_{k\geq p} u_n^k$ converge, pour $p \to \infty$, vers $\sum_{n=0}^\infty l_n$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \leq \liminf_p \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p.$$

1-3. On suppose qu'il existe une suite positive $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait

$$|u_n^p| \leq z_n$$

et telle que la série $\sum z_n$ soit convergente.

i. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^p$ converge.

ii. Montrer que

$$\lim_p \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} l_n.$$

2. On considère une suite à double indice $(u_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, et on suppose que, pour tous entiers n et p, u_n^p est dans $[-1, 1]$.

2-1. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(u_0^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

2-2. Montrer que si $\left(u_n^{\varphi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite de $\left(u_{n+1}^{\varphi(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

2-3. Montrer que si φ_0, φ_1, φ_2, etc. sont des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors la fonction

$$\psi : p \mapsto \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_p(p)$$

est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

2-4. En déduire qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n, la suite $\left(u_n^{\psi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ soit une sous-suite convergente de $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$.

2-5. On pose $\mathcal{S} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ et, on considère la famille à double indices $(s_\sigma^p)_{(p,\sigma)\in\mathbb{N}\times\mathcal{S}}$ définie pour $\sigma \in \mathcal{S}$ et $p \in \mathbb{N}$ par

$$s_\sigma^p = \sigma_p$$

(on rappelle que $\sigma \in \mathcal{S}$ est une suite ; σ_p est donc son $p^{\text{ème}}$ terme). Existe-t-il une fonction strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(s_\sigma^{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente quel que soit $\sigma \in \mathcal{S}$? Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\mathcal{S}$?

3. On considère une suite à double indice $(u_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$, et on suppose que pour tout entier p, on a l'inégalité,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n^p|^2 \leq 1.$$

3-1. Montrer qu'il existe une fonction ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\left(u_n^{\psi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour tout n vers une limite l_n.

3-2. Montrer que les séries $\sum |l_n|^2$ et $\sum |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2$ sont convergente.

3-3. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 \underset{p\to\infty}{\to} 0$$

4. On définit la suite $(\delta_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\delta_n^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n \end{cases}$$

4-1. Montrer que pour tout entier n, la suite $(\delta_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l_n que l'on précisera.

4-2. A-t-on

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n^p - l_n|^2 \underset{p\to\infty}{\to} 0 \ ?$$

Pourquoi ?