Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1$^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

Devoir n°1
Corrigé

Partie I

1. On écrit
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

2. On peut par exemple écrire, pour $n \geq 2$,
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$
ce qui implique que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2.$$
La série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ a ces sommes partielles majorées, elle est donc convergente.

3. La série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ a un terme général positif équivalent à $\frac{1}{2n^2}$ (question 1.). Or on a montré que la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ convergeait (question 2.). Par conséquent, $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est bien absolument convergente.

4. On peut écrire
$$u_N = u_1 + \sum_{n=1}^{N-1}(u_{n+1} - u_n).$$
Le membre de droite est convergent puisque la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge en tant que série absolument convergente, (question 3.).

5. On sait que
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Or, on a
$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{-1}{2n(n+1)} = \frac{-1}{2n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{-1}{2n^2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{-1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
ce qui montre le développement demandé.

6. Pour $k \geq 2$ et $t \in [k-1, k]$, on a
$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{t^3}.$$
Par conséquent, pour $n \geq 2$,
$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{2N^2}.$$
En passant à la limite $N \to \infty$ (comme $0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$, et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (question 2.), la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge), on obtient l'inégalité voulue.

7. On a

$$\begin{aligned}
\gamma &= u_n + \lim_N (u_N - u_n) \\
&= u_n + \lim_N \left(\sum_{k=n}^{N-1} (u_{k+1} - u_k) \right) \\
&= u_n + \lim_N \left(\sum_{k=n}^{N-1} \left(u_{k+1} - u_k - \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right) + \sum_{k=n}^{N-1} \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right) \\
&= u_n + \lim_N \left(\sum_{k=n}^{N-1} \left(u_{k+1} - u_k - \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right) + \left(\frac{1}{2N} - \frac{1}{2n} \right) \right) \\
&= u_n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(u_{k+1} - u_k - \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Par la question 5., on sait qu'il existe une constante M telle que pour n assez grand, on ait

$$\left| u_{n+1} - u_n - \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right| \leq \frac{M}{n^3}.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(u_{k+1} - u_k - \left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right) \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{M}{2(n-1)^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

En regroupant tout, on obtient

$$\gamma = u_n - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

qui est le développement demandé.

Partie II

1. On a $0 \leq |n^\alpha \sin(n)| \leq n^\alpha$. Si $\alpha < 0$, alors n^α tend vers 0 ; le théorème des gendarmes montre alors que $(n^\alpha \sin(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

2. (a) On a $|e^{i(n+1)} - e^{in}| = |e^{in}(e^i - 1)| = |e^{in}||e^i - 1| = |e^i - 1| \neq 0$. Par conséquent, $|e^{i(n+1)} - e^{in}|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. Notamment, $(e^{in})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy. En particulier $(e^{in})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

   (b) On a $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$. Par conséquent,

   $$\cos(n) = \frac{1}{\sin(1)} \left(\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1) \right). \tag{1}$$

   Si $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors le membre de droite de (1) converge (vers $\frac{\lim_n \sin(n)}{\sin(1)}(1 - \cos(1))$), de sorte que $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

   (c) Si $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (question (b)), ce qui implique que $(e^{in})_{n \in \mathbb{N}} = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}} + i(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Or on a montré (question (a)) que ce n'était pas le cas. En conclusion, $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

3. (a) On considère les éléments $-E(kx) + kx$ avec k variant de 0 à N, et où E désigne la fonction partie entière. Comme par définition $E(kx) \leq kx < E(kx)+1$, on a bien $-E(kx)+kx \in [0, 1[$, et si $-E(kx)+kx = -E(qx)+qx$ avec $k \neq q$, alors $x = \frac{E(kx)-E(qx)}{k-q}$, ce qui contredit l'irrationalié de x. Les $-E(kx) + kx$, avec $k = 0, \ldots, N$ sont donc $N + 1$ éléments disctincts.

   (b) On a constuit (question (a)) $N+1$ éléments distincts de l'ensemble $[0, 1[= \bigcup_{k=1}^N \left[\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}\right[$. Par conséquent, il existe un q tel que $\left[\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}\right[$ contienne au moints 2 éléments de la forme $a_1 + b_1 x$ et $a_2 + b_2 x$, avec b_1 et b_2 dans $\{0, \ldots, N\}$. Par conséquent,

   $$|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)x| = |(a_1 + b_1 x) - (a_2 + b_2 x)| \leq \frac{1}{N}.$$

On obtient donc le résultat en posant $n = a_1 - a_2$ et $m = b_1 - b_2$. En effet, comme b_1 et b_2 sont dans $\{0, \dots, N\}$, on a $|m| = |b_1 - b_2| \leq N$ ce qui donne

$$|n| \leq |n - mx| + |mx| \leq \frac{1}{N} + Nx \leq 1 + Nx.$$

(c) On peut suppose n positif quitte à changer $n+mx$ en $-n-mx$, qui vérifie les mêmes propriétés.

4. On suppose $\theta > 0$ (le cas $\theta = 0$ étant déjà fait à la question 3., et le cas $\theta < 0$ s'y ramenant en changeant les signes). Comme 2π est irrationnel, il existe (question 3.) deux entiers n_0 et m_0 avec $n_0 \geq 0$ tels que $|n_0 + 2\pi m_0| \leq \frac{1}{N}$. On pose $k = \max\{q \in \mathbb{N},\ q(n_0 + 2\pi m_0) \leq \theta\}$, qui est fini puisque $q(n_0 + 2\pi m_0)$ tend vers $+\infty$ pour $q \to \infty$. On a donc

$$k(n_0 + 2\pi m_0) \leq \theta < (k+1)(n_0 + 2\pi m_0),$$

ce qui montre

$$0 \leq \theta - k(n_0 + 2\pi m_0) \leq (n_0 + 2\pi m_0),$$

soit encore

$$|\theta - k(n_0 + 2\pi m_0)| \leq |n_0 + 2\pi m_0| \leq \frac{1}{N}.$$

On obtient le résultat avec $n = kn_0 \geq 0$, $m = km_0$.

5. Soit $y \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\theta) = y$. Pour tout $N > 0$ entier, on considère (d'après la question 4.) deux entiers n_N et m_N avec $n_N \geq 0$ tels que $|n_N + 2m_N\pi - \theta| \leq \frac{1}{N}$. On a alors

$$|\sin(n_N) - y| = |\sin(n_N + 2m_N\pi) - \sin(\theta)| \leq |n_N + 2m_N\pi - \theta| \leq \frac{1}{N},$$

par le théorème des accroissements finis (puisque $|\sin'| = |\cos| \leq 1$). En faisant tendre N vers ∞, on obtient que $(\sin(n_N))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers y. y est donc valeur d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Par la question 3., pour tout entier N on peut trouver n_N et m_N avec $n_N \geq 0$ tels que $|n_N - 2\pi m_N| \leq \frac{1}{N}$. Par conséquent

$$|n_N^\alpha \sin(n_N)| = |n_N^\alpha \sin(n_N - 2\pi m_N)| \leq n_N^\alpha |n_N - 2\pi m_N| \leq n_N^\alpha \frac{1}{N} \leq (|x|N + 1)^\alpha \frac{1}{N} \sim |x|^\alpha N^{\alpha - 1}.$$

Comme α est supposé inférieur à 1, on trouve que $\sin(n_N)$ tend vers 0, qui est donc valeur d'adhérence de $(s \in (n))_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Comme 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe deux suites $(n_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $(\sin(n_k^1))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n_k^2))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 1 et -1. Par conséquent, les suites $((n_k^1)^\alpha \sin(n_k^1))_{k\in\mathbb{N}}$ et $((n_k^2)^\alpha \sin(n_k^2))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ∞ et $-\infty$ (puisque $\alpha > 0$). On a donc

$$\liminf_n n^\alpha \sin(n) = -\infty, \quad \text{et} \quad \liminf_n n^\alpha \sin(n) = +\infty.$$

Partie III

1. 1-1. i. Comme on a $u_n^p \leq u_n^{p+1}$, la suite $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, et est donc inférieure à sa limite : on a ainsi $0 \leq u_n^p \leq l_n$. Comme la série $\sum l_n$ converge, la série $\sum_n u_n^p$ converge également.

ii. Comme $u_n^p \leq u_n^{p+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{p+1}.$$

Par conséquent, la suite $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante ; il y donc deux comportements possibles : ou bien elle est majorée, auquel cas elle converge, ou bien elle ne l'est pas, auquel cas elle tend vers $+\infty$. Elle a donc bien une limite, éventuellement infinie.

iii. Comme $0 \leq l_n$, si la série $\sum l_n$ ne converge pas, c'est qu'elle tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout M, il existe N tel que

$$\sum_{n=0}^{N} l_n \geq M.$$

iv. Si $\sum l_n$ converge, ses restes tendent vers 0. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_n - \sum_{k=0}^{N} l_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} l_n \geq \varepsilon,$$

ce qui donne le résultat.

v. Si $\sum l_n$ converge, on considère un $\varepsilon > 0$ et N tel que $\sum_{n=0}^{N} l_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} l_n - \varepsilon$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \geq \lim_p \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \geq \lim_p \sum_{n=0}^{N} u_n^p = \sum_{n=0}^{N} l_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} l_n - \varepsilon. \tag{2}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout ε, on a bien $\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \lim_p \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p$.

1-2. La suite $\inf_{k\geq p} u_n^k$ est croissante et converge vers l_n, par conséquent le résultat de la question 1-1 montre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \lim_p \sum_{n=0}^{\infty} \inf_{k\geq p} u_n^k.$$

Cependant, on a $\inf_{k\geq p} u_n^k \leq u_n^p$, de sorte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \inf_{k\geq p} u_n^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p.$$

En passant à la limite inférieure en p, on obtient le résultat souhaité.

1-3. i. On a $0 \leq |u_n^p| \leq z_n$, où la série $\sum z_n$ converge. Par conséquent la série $\sum_n |u_n^p|$ est convergente, ce qui montre que la série $\sum u_n^p$ est absolument convergente, donc convergente.

ii. La suite $|u_n^p - l_n|$ vérifie $|u_n^p - l_n| \leq |u_n^p| + |l_n| \leq 2z_n$. Par conséquent $(2z_n - |u_n^p - l_n|)_{p\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives et tend (pour $p \to \infty$) vers $2z_n$. Par conséquent, la question 1-2. montre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2z_n \leq \liminf_p \sum_{n=0}^{\infty} (2z_n - |u_n^p - l_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} 2z_n - \limsup_p \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p - l_n|,$$

autrement dit

$$0 \leq \limsup_p \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p - l_n| \leq 0,$$

ce qui montre que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p - l_n|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} l_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p - l_n|,$$

ce qui permet de conclure.

2. 2-1. La suite $(u_0^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée (à valeurs dans $[-1, 1]$). On peut donc en extraire une sous-suite convergente.

2-2. Soit $\left(u_n^{\varphi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$. La suite $\left(u_{n+1}^{\varphi(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente.

2-3. Si φ_0, φ_1, φ_2, etc. sont des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors pour tout p, la fonction $\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_p$ est strictement croissante. De plus si φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on voit par récurrence que $\varphi(n) \geq n$. Par conséquent, on a

$$\varphi_{p+1}(p+1) \geq \varphi_{p+1}(p) \geq p,$$

et en appliquant la fonction croissante $\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_p$, on trouve

$$\psi(p+1) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1}(p+1)) \geq \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(p) = \psi(p).$$

2-4. On construit par récurrence la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ de la manière suivante. On extrait de la suite $(u_0^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente $\left(u_0^{\varphi_0(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. Si on suppose φ_0,...φ_k construites, alors on extrait de $(u_{k+1}^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $(u_{k+1}^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. On construit alors une fonction ψ comme dans la question 2.3. On voit que pour $p \geq n_0$, $\psi(p)$ est dans l'image de $\psi_0 \circ \ldots \circ \psi_{n_0}$. Par conséquent, $(u_{n_0}^{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est, pour p assez grand, une sous-suite de $(u_{n_0}^{\varphi_0\circ\ldots\circ\psi_{n_0}(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui est par construction une suite convergente.

2-5. Il n'existe pas de fonction strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(s_\sigma^{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente pour tout σ. En effet, considérons une fonction ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et définissons $\tau \in \mathcal{S}$ par

$$\begin{cases} \tau_{\psi(2n)} & = 1 \\ \tau_{\psi(2n+1)} & = 0 \\ \tau_k & = 0 \text{ (ou toute autre valeur), si } k \text{ n'est pas de la forme } \psi(m) \end{cases}.$$

Alors on a $s_\tau^{\psi(p)} = \frac{1+(-1)^p}{2}$ qui ne converge pas.
On peut en déduire que l'ensemble $\mathcal{S}$ ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ (sinon les questions précédentes permettraient de construire un tel ψ).

3. 3-1. On a, pour tout $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^p|^2 \leq n|u_n^p|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|u_n^p|^2 \leq 1.$$

De sorte que $(u_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[-1, 1]$. La question 2. montre alors qu'il existe un ψ tel que $\left(u_n^{\psi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, quel que soit n.

3-2. On a

$$\sum_{n=0}^{N} |l_n|^2 = \lim_p \sum_{n=0}^{N} |u_n^p|^2$$

Or $\sum_{n=0}^{N} |u_n^p|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} n|u_n^p|^2 \leq 1$. Donc $\sum |l_n|^2$ est convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{N} |l_n|^2 + \sum_{n=0}^{N} |l_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |l_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |l_n|^2.$$

La série $\sum |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2$ est donc aussi convergente.

3-3. On a (en utilisant la question 1-2.)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \left(\sum_{n=N}^{\infty} |u_n^{\psi(p)}|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |l_n|^2\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \left(\sum_{n=N}^{\infty} |u_n^{\psi(p)}|^2 + \liminf_p \sum_{n=N}^{\infty} |u_n^p|^2\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \frac{1}{N}\left(\sum_{n=N}^{\infty} n|u_n^{\psi(p)}|^2 + \liminf_p \sum_{n=N}^{\infty} n|u_n^p|^2\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\limsup_p \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 \leq \limsup_p \sum_{n=0}^{N-1} |u_n^{\psi(p)} - l_n|^2 + \frac{2}{N} = \frac{2}{N}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout N, on a le résultat voulu.

4. 4-1. La suite $(\delta_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle à tous les rangs, sauf au $n^{\text{ème}}$. Par conséquent, elle est nulle à partir d'un certain rang et converge vers $l_n = 0$.

   4-2. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n^p - l_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n^p|^2 = 0 + |\delta_p^p|^2 = 1,$$

qui ne converge pas vers 0. Cela est dû au fait que la suite $(\delta_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ ne vérifie par l'hypothèse

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\delta_n^p|^2 \leq 1,$$

puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\delta_n^p|^2 = p.$$