Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

Devoir
Durée : 2 heures 30

Les différentes parties sont indépendantes. Si besoin, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour le réutiliser dans une question ultérieure.

Partie I

Dans cette partie on s'intéresse à deux fonctions D_n et F_n, appelées respectivement *noyau de Dirichlet* et *noyau de Fejér*. Ces fonctions interviennent dans la théorie des séries de Fourier. La fonction D_n est définie par la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

1. On considère la fonction Δ_n définie sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ par la formule

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \Delta_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   Montrer que Δ_n peut se prolonger par continuité en tous les points de la forme $2\pi k$, avec k entier relatif. On note encore Δ_n le prolongement continu de Δ_n à $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Tracer soigneusement le graphe de la restriction de Δ_3 à $[-\pi, \pi]$.

3. Montrer que $D_n(x) = \Delta_n(x)$ pour tout entier n et tout réel x.

4. Pour tout entier n, montrer l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\mathrm{d}x = 2\pi$.

5. On note $\tau = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, montrer l'inégalité

   $$\frac{2\tau}{\pi \sin\left(\frac{(k+1)\tau}{2}\right)} \leq \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} |D_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2\tau}{\pi \sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}.$$

   Établir l'inégalité

   $$0 \leq \int_0^{\tau} |D_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2\pi.$$

6. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

   $$u_n \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\mathrm{d}x \leq v_n$$

   dont les comportements asymptotiques sont $u_n \sim \frac{8}{\pi}\ln(n)$, et $v_n \sim 4\ln(n)$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ et chercher un encadrement de la fome $\lambda x \leq \sin(x) \leq \mu x$ valables pour certaines valeurs de x. *En fait, un peu plus de travail permettrait de montrer que* $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx \sim \frac{8}{\pi}\ln(n)$.

On considère maintenant la fonction $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

7. Montrer que la fonction Φ_n définie sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \Phi_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

   est 2π-périodique et peut se prolonger par continuité en tous les points de la forme $2\pi k$. On notera encore Φ_n le prolongement continu de Φ_n à $\mathbb{R}$ tout entier.

8. Pour x dans $\mathbb{R}$, quelle est la limite quand n tend vers l'infini de la suite $(\Phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$? On pourra séparer les cas $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

9. Tracer soigneusement le graphe de la restriction de Φ_7 à $[-\pi, \pi]$.
10. Pour tout entier n et tout réel x, montrer l'égalité $\Phi_n(x) = F_n(x)$.
11. Montrer que pour tout entier n, on a $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(x)|\mathrm{d}x = 2\pi$.
12. Soit $0 < \varepsilon < \pi$ un réel. Montrer que la suite $\left(\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} |F_n(x)|\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On pourra chercher à majorer $|F_n(x)|$ pour $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ par une quantité indépendante de x.

Partie II

Dans cette partie nous considérons la série $\sum \frac{1}{p_n}$, où p_n désigne le $n^{\text{ème}}$ nombre premier, de sorte que

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ \text{etc.}$$

On va montrer par l'absurde que cette série est divergente. Par conséquent, dans la suite de cette partie, on suppose que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

1. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{p_k} < \frac{1}{2}$.

Pour N un entier, on définit l'ensemble A_N comme l'ensemble de tous les entiers de $\{1, \ldots, N\}$ dont au moins un facteur premier est supérieur ou égal à p_{n_0}. On définit aussi $B_N = \{1, \ldots, N\} \setminus A_N$.

2. Montrer que le nombre d'éléments de $\{1, \ldots, N\}$ divisibles par un nombre premier p donné est $E\left(\frac{N}{p}\right)$, où E désigne la fonction partie entière.
3. En déduire que A_N a moins de $\frac{N}{2}$ éléments. Qu'en déduit-on sur le nombre d'éléments de B_N ?
4. Montrer que tout entier strictement positif n peut s'écrire d'une unique manière sous la forme $n = m_n q_n^2$, où $m_n \in \mathbb{N}$ est sans facteur carré[1] et $q_n \in \mathbb{N}$ (on pourra décomposer n en facteur premiers).
5. Montrer que si $n \leq N$, alors $q_n \leq \sqrt{N}$. Montrer que l'ensemble $\{m_n,\ n \in B_N\}$ contient au plus 2^{n_0} éléments. En déduire que B_N a moins de $2^{n_0}\sqrt{N}$ éléments.
6. En déduire que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Partie III

Cette partie a pour but d'établir le *théorème de Stone-Weierstrass*, dont voici un énoncé :

> *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et ε un réel strictement positif. Alors, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que*
>
> $$\sup_{t\in[0,1]} |P(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, on peut, aussi précisément que voulu, approcher f par un polynôme, uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$.

Dans toute la suite de cette partie, on va donc se donner une fonction f, définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue, que l'on va chercher à approcher par un polynôme.

1. (a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, N\}$, on ait
$$\sup_{t\in I_k} f(t) - \inf_{t\in I_k} f(t) \leq \varepsilon,$$
où l'on a noté $I_k = \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$.
   (b) En déduire qu'il existe une fonction g affine par morceaux sur $[0, 1]$ telle que
$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon.$$
2. On considère la suite de polynômes définie par la relation de récurrence
$$P_0 = 0 \quad ; \quad P_{n+1} = P_n + \frac{X^2 - P_n^2}{2}.$$

[1] C'est-à-dire que m_n est un produit de nombres premiers *distincts*, comme 2×3 ou $2 \times 5 \times 7$, mais pas comme $2^2 \times 3$.

(a) Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, et tout entier n, on a l'inégalité $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq |t|$.

(b) En déduire que pour tout t de $[-1,1]$, $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|t|$.

(c) Montrer que pour tout entier n, il existe un élément t_n de $[-1,1]$ tel que $|t_n| - P_n(t_n) = \sup_{t\in[-1,1]} |t| - P_n(t)$.

(d) Montrer que la suite $\left(\sup_{t\in[-1,1]} \Big|P_n(t) - |t|\Big|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On pourra considérer une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\tilde{t}$ et montrer que pour tout n, on a $\limsup_m |t_{\varphi(m)}| - P_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) \leq |\tilde{t}| - P_n(\tilde{t})$.

(e) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in [0,1]$, il existe un polynôme P tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} \Big|P(t) - |t-a|\Big| \leq \varepsilon.$$

3. (a) Montrer que la famille de fonctions $(\varphi_a)_{a\in[0,1]}$ définie par

$$\varphi_a(t) = |t-a|,$$

est libre. En déduire toute fonction affine par morceaux sur $[0,1]$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions de la forme φ_a.

(b) Montrer le théorème de Stone-Weierstrass.

4. Montrer que dans l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass on peut supposer le polynôme P à coefficients *rationnels.*

5. Dans l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass, peut-on supposer que le polynôme P a des coefficients *entiers* ?

6. On définit la suite de polynôme $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$Q_0 = 2X(1-X), \quad Q_{n+1} = 2Q_n(1-Q_n).$$

(a) Montrer que pour tout entier n, Q_n est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, la suite $(Q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante convergeant vers $\frac{1}{2}$.

(c) Soit $0 < \eta < \frac{1}{2}$. Montrer que pour $t \in [\eta, 1-\eta]$, on a $|Q_n(t) - \frac{1}{2}| \leq |Q_n(\eta) - \frac{1}{2}|$.

7. En déduire que pour tout réels α et η, avec $0 < \eta < \frac{1}{2}$, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\sup_{t\in[\eta,1-\eta]} \Big|P(t) - \alpha\Big| \leq \varepsilon.$$

8. Montrer que pour tout réels $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\sup_{t\in[\eta,1-\eta]} |P(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$