Université Pierre et Marie Curie
Master EF $1^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

Devoir n°2
Corrigé

Partie I

1. Par 2π-périodicité, il suffit de vérifier que Δ_n se prolonge par continuité en 0. Un développement limité en 0 montre que
$$\Delta_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x + o(x)}{\frac{x}{2}+o(x)} = \frac{n+\frac{1}{2}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)} = 2n+1+o(1).$$
La fonction Δ_n admet donc bien une limite en 0, valant $2n+1$.

2. Le graphe est représenté sur la Figure 1. Les points importants : la fonction Δ_3 vaut 7 en 0, s'annule

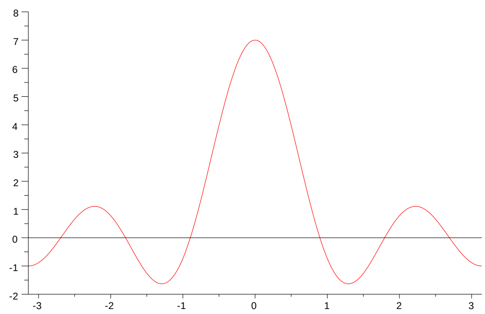

Figure 1: La fonction Δ_3.

en $\pm\frac{2\pi}{7}$, $\pm\frac{4\pi}{7}$ et $\pm\frac{6\pi}{7}$ et vaut -1 en $\pm\pi$. En $\pm\frac{3\pi}{7}$, la fonction prend une valeur inférieure à -1 et en $\pm\frac{5\pi}{7}$, la fonction prend une valeur supérieure à 1.

3. Il est possible de faire une récurrence, en utilisant le fait que $D_{n+1} = D_n + 2\cos((n+1)x)$ et la formule
$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + 2\cos((n+1)x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right)$$
(il s'agit de $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$ avec $\alpha = (n+1)x$ et $\beta = \frac{x}{2}$).
On peut également remarquer que l'on a affaire aux sommes d'une suite géométrique de raison e^{ix}, d'où
$$D_n(x) = e^{-inx}\frac{1-e^{(2n+1)ix}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. On écrit
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi + 0.\end{aligned}$$

5. Pour la première égalité, on remarque que la fonction sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors l'inégalité
$$\frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{\sin\left(\frac{(k+1)\tau}{2}\right)} \leq \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \leq \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}$$

sur l'intervalle $[k\tau, (k+1)\tau]$. On peut ensuite intégrer, en effet, comme $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$ est de signe constant sur les intervalles de la forme $[k\tau, (k+1)\tau]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right| \mathrm{d}x &= \left|\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{|\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)|}{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}\tau.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire appliquée à la définition de Δ_n montre que $|D_n(x)| = |\Delta_n(x)| \leq 2n+1$ quel que soit x. On a alors $0 \leq \int_0^\tau |D_n(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^\tau (2n+1)\mathrm{d}x = (2n+1)\tau = 2\pi$.

6. Tout d'abord, la parité de D_n montre $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi |D_n(x)|\mathrm{d}x$. Ensuite, en utilisant les inégalités de la question précédente et l'inégalité $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$, vraie pour x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{8}{\pi k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4\tau}{\pi \sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)} = 2\int_0^\pi |D_n(x)|\mathrm{d}x \leq 4\pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4\tau}{\pi \sin\left(\frac{(k+1)\tau}{2}\right)} \leq 4\pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{k+1}.$$

Les sommes apparaissant dans les membres de droite et de gauche sont respectivement équivalentes à $\frac{8}{\pi}\ln(n)$ et $4\ln(n)$.

7. Comme à la question 1., on peut se limiter à montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0. Un développement limité donne alors, au voisinage de $x = 0$,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{nx}{2} + o(x)}{\frac{x}{2} + o(x)}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{n}{2} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)}\right)^2 = n + o(1).$$

Par conséquent, Φ_n est bien prolongeable par continuité en 0 et son prolongement vérifie $\Phi_n(0) = n$.

8. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\Phi_n(x) = n$. Par conséquent, $\lim_n \Phi_n(x) = \infty$.
Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, On voit que $(\Phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en écrivant

$$0 \leq |\Phi_n(x)| = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|^2 \leq \frac{1}{n\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2} \to 0.$$

9. On peut s'aider du graphe de la question 3 en remarquant que $\Phi_7 = \frac{1}{7}(\Delta_3)^2$. Le graphe est représenté en Figure 2. Les points importants : la fonction Φ_7 vaut 7 en 0, s'annule en $\pm\frac{2\pi}{7}$, $\pm\frac{4\pi}{7}$ et $\pm\frac{6\pi}{7}$ et

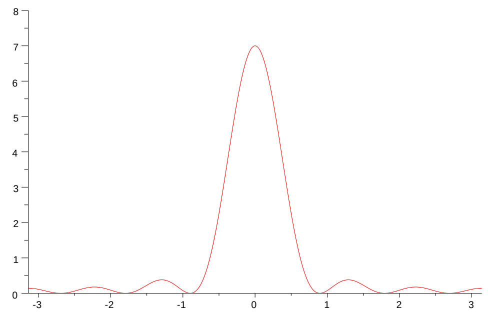

Figure 2: La fonction Φ_7.

vaut $-1/7$ en $\pm\pi$. En $\pm\frac{3\pi}{7}$ et en $\pm\frac{5\pi}{7}$, la fonction prend une valeur comprise entre $\frac{1}{7}$ et 1. Aux points où elle s'annule, la fonction est dérivable ! On a donc une pente nulle.

10. On peut le faire par récurrence. L'itération se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\left(nF_n(x)+D_n(x)\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(n\Phi_n(x)+D_n(x)\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left(\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left(1-\cos(nx)+\cos(nx)-\cos((n+1)x)\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left(\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité s'obtient par application de la formule $\sin(\alpha)\sin(\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ avec $\alpha=\beta=\frac{nx}{2}$ puis avec $\alpha=(n+\frac{1}{2})x$ et $\beta=\frac{x}{2}$. La dernière s'obtient par la formule $1-\cos(\alpha)=\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ avec $\alpha=nx$.

11. La fonction Φ_n est clairement positive, par conséquent

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(x)|\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\pi=2\pi.$$

12. Pour $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est minoré par $\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, de sorte qu'on a l'inégalité

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}|F_n(x)|\mathrm{d}x\le\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\mathrm{d}x\le\frac{2(\pi-\varepsilon)}{n\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

ce dernier terme tendant vers 0 en n.

Partie II

1. La série $\sum\frac{1}{p_n}$ a été supposée convergente. Par conséquent, ses restes $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ tendent vers 0. Par définition de la convergence d'une suite, on peut donc trouver un entier n_0 tel que si $n\ge n_0$, on ait $\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{p_k}-0\right|\le\frac{1}{2}$. Cet entier n_0 convient donc.

2. Les éléments de $\{1,\dots,N\}$ divisible par p sont les éléments de la forme kp, avec k un entier vérifiant $1\le kp\le N$. Il sont donc en bijection avec les entiers k tels que $\frac{1}{p}\le k\le\frac{N}{p}$, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble $\left\{1,\dots,E\left(\frac{N}{p}\right)\right\}$, qui sont au nombre de $E\left(\frac{N}{p}\right)$.

3. Le nombre d'élément de A_N peut se majorer en utilisant la décomposition :

$$A_N=\bigcup_{n\ge n_0}p_n\mathbb{N}\cap\{1,\dots,N\},$$

puisque $p\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers divisibles par p. Or, d'après la question précédente, le cardinal de $p_n\mathbb{N}\cap\{1,\dots,N\}$ est $E\left(\frac{N}{p_n}\right)$. Par conséquent, le cardinal de A_N est inférieur à $\sum_{k=n_0}^{\infty}E\left(\frac{N}{p_k}\right)\le\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{N}{p_k}<\frac{N}{2}$, la dernière inégalité venant de la définition de n_0. On en déduit que $\mathrm{card}(B_N)=N-\mathrm{card}(A_N)\ge N-\frac{N}{2}=\frac{N}{2}$.

4. On décompose n en produit de facteurs premiers : $n=\prod_{k\ge1}p_k^{a_k}$ (le produit étant en fait fini, car n'admettant qu'un nombre fini de termes $\neq1$). On décompose ensuite ce produit en fonction de la parité des a_k :

$$n=\prod_{k\ge1}p_k^{a_k}=\prod_{a_k\text{ pair}}p_k^{a_k}\prod_{a_k\text{ impair}}p_k^{a_k}=\left(\prod_{a_k\text{ pair}}p_k^{\frac{a_k}{2}}\right)^2\left(\prod_{a_k\text{ impair}}p_k^{\frac{a_k-1}{2}}\right)^2\prod_{a_k\text{ impair}}p_k,$$

ce qui donne l'expression cherchée.

L'unicité vient de l'unicité de la décomposition en facteur premier : les facteurs premiers de m_n doivent apparaître à une puissance impaire dans n, et les facteurs de n absents de m_n doivent apparaître à une puissance paire dans n. Un entier sans facteur carré étant entièrement déterminé par ses facteurs premiers, m_n est unique. L'égalité $q_n = \sqrt{n/m_n}$ donne l'unicité de q_n.

5. Dans l'écriture $n = m_n q_n^2$, on a $m_n \geq 1$. Si on suppose $n \leq N$, on a donc $q_n^2 \leq n \leq N$, ou encore $q_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$.

   Ensuite, l'entier m_n est un produit de nombres premiers distincts. Si $n \in B_N$, tous ces nombres premiers sont inférieurs ou égaux à p_{n_0}. Par conséquent, on a, pour $n \in B_N$,

$$m_n = \prod_{i=1}^{n_0} p_i^{\varepsilon_i},$$

   ou $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Le nombre de tels n_0-uplets $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0})$ est 2^{n_0}.

   Les deux points précédents montrent que l'application $(m,q) \mapsto mq^2$ est une surjection de l'ensemble $\{m_n, n \in B_N\} \times \{1, \dots, \sqrt{N}\}$ (qui a moins de $2^{n_0}\sqrt{N}$ élément) sur B_N, ce qui montre que B_N a moins de $2^{n_0}\sqrt{N}$ éléments.

6. Les deux dernière questions donnent l'inégalité

$$\frac{N}{2} \leq \operatorname{card}(B_N) \leq 2^{n_0}\sqrt{N}.$$

   Or, pour $N \to \infty$, on a $2^{n_0}\sqrt{N} = o\left(\frac{N}{2}\right)$, ce qui amène à une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse initiale selon laquelle la série $\sum \frac{1}{p_n}$ convergeait était fausse. Cette série est donc divergente.

Partie III

1. (a) La fonction f étant continue sur l'intervalle compact $[0,1]$, elle est également uniformément continue (c'est le théorème de Heine). Il existe donc un réel η tel que pour tout x et y de $[0,1]$, si $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Considérons un entier N_1 tel que $\frac{1}{N_1} \leq \eta$.

   On fixe alors un entier $1 \leq k \leq N_1$. Pour x et y dans I_k, on a $|x-y| \leq \frac{1}{N_1} \leq \eta$. Notamment,

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

   En passant à la borne supérieure en x et à la borne inférieure en y, on trouve l'inégalité annoncée.

   (b) On choisit N_1 comme à la question précédente, et on définit la fonction g comme la fonction affine par morceaux associée à la subdivision $0 < \frac{1}{N_1} < \ldots < \frac{N_1-1}{N_1} < 1$ telle que $g\left(\frac{k}{N_1}\right) = f\left(\frac{k}{N_1}\right)$.

   Soit t un élément de $[0,1]$. On peut alors trouver un entier $1 \leq k \leq N_1$ tel que $t \in I_k$. Comme g est affine sur I_k, $g(t)$ est compris entre le minimum et le maximum de $g\left(\frac{k-1}{N_1}\right) = f\left(\frac{k-1}{N_1}\right)$ et de $g\left(\frac{k-1}{N_1}\right) = f\left(\frac{k-1}{N_1}\right)$. Par conséquent, $g(t)$ et $f(t)$ sont éléments de l'intervalle $[\min_{I_k} f, \max_{I_k} f]$, de sorte que $|f(t) - g(t)| \leq |\max_{I_k} f - \min_{I_k} f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2. (a) La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet, $P_0 = 0$ et $P_1 = \frac{X^2}{2}$, et pour $t \in [-1,1]$ on a bien $0 \leq 0 \leq \frac{t^2}{2} \leq |t|$.

   Supposons l'inégalité vérifiée au rang n. Par hypothèse de récurrence, on a bien $0 \leq P_{n+1}(t)$ pour t dans $[-1,1]$. De plus, $P_{n+2} = P_{n+1} + \frac{X^2 - P_{n+1}^2}{2}$. On a alors $P_{n+2}(t) - P_{n+1}(t) = \frac{t^2 - P_{n+1}(t)}{2} \geq 0$, puisque $P_{n+1}(t) \leq |t|$, de sorte que $P_{n+1}(t) \leq P_{n+2}(t)$. Pour la dernière inégalité, on observe que la fonction $\varphi_t : x \mapsto x + \frac{t^2 - x^2}{2}$ a une dérivée positive sur $[0,1]$, et est donc croissante, de sorte que $P_{n+2}(t) = \varphi_t(P_{n+1}(t)) \leq \varphi_t(|t|) = |t|$.

(b) D'après la question précédente, pour $t \in [-1,1]$, la suite $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $|t|$ de sorte qu'elle converge vers une limite λ finie. Comme $P_n(t) \geq 0$, on a forcément $\lambda \geq 0$. En passant à la limite dans l'inégalité définissant P_n, on obtient $\lambda = \lambda + \frac{t^2-\lambda^2}{2}$, de sorte que $\lambda^2 = t^2$. Comme $\lambda \geq 0$, on en déduit $\lambda = |t|$.

(c) La fonction de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $t \mapsto |t| - P_n(t)$ est continue, et l'intervalle $[-1,1]$ est un segment. Par conséquent, cette fonction atteint son maximum en un point que l'on note t_n.

(d) La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée (elle est incluse dans $[-1,1]$) on peut en extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\tilde{t} \in [-1,1]$. Par décroissance de la suite $(|t| - P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour $\varphi(m) \leq n$ et tout $t \in [-1,1]$, $|t| - P_{\varphi(n)}(t) \leq |t| - P_n(t)$. Le cas particulier $t = t_{\varphi(m)}$ donne $|t_{\varphi(m)}| - P_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) \leq |t_{\varphi(m)}| - P_n(t_{\varphi(n)})$. En passant à la limite supérieure en m, on obtient $\limsup_m |t| - P_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) \leq |\tilde{t}| - P_m(\tilde{t})$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\limsup_m |t_{\varphi(m)}| - P_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) = 0$, d'où $\lim_m |t_{\varphi(m)}| - P_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) = 0$. Par ailleurs, la suite $(|t_m| - P_m(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ce qui montre $\lim_m |t_m| - P_m(t_m) = 0$. Comme $|t_m| - P_m(t_m) = \sup_{t\in[-1,1]} |t| - P_m(t)$, on a le résultat voulu.

(e) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 2.(d), il existe un polynôme P tel que $\sup_{t\in[-1,1]} \Big|P(t) - |t|\Big| \leq \varepsilon$. Quel que soit $a \in [0,1]$, on a alors

$$\sup_{t\in[0,1]} \Big|P(t-a) - |t-a|\Big| = \sup_{t\in[-a,1-a]} \Big|P(t) - |t|\Big| \leq \sup_{t\in[-1,1]} \Big|P(t) - |t|\Big| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre le résultat.

3. (a) Soient λ_0,..., λ_n et a_0,..., a_n des réels avec $a_i \in [0,1]$ vérifiant

$$\forall t \in [0,1], \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i |t - a_i| = 0.$$

On peut alors écrire $-\lambda_{i_0}|t - a_{i_0}| = \sum_{i\neq i_0} \lambda_i |t - a_i|$. Or le membre de droite de cette égalité est dérivable en a_{i_0}, et le membre de gauche n'est dérivable en a_{i_0} que si $\lambda_{i_0} = 0$. Par conséquent, tous les λ_i sont nuls, et la famille est libre.

Soit $E_{a_0,\ldots,a_n}$ l'espace des fonctions affines par morceaux sur la subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$. L'application

$$\Phi : \begin{cases} E_{a_0,\ldots,a_n} & \to \mathbb{R}^{n+1} \\ \varphi & \mapsto (\varphi) \end{cases}$$

est un isomorphisme, de sorte que $E_{a_0,\ldots,a_n}$ dimension $n+1$. La famille $(\varphi_{a_i})_{i=0,\ldots,n}$ est une famille libre composé de $n+1$ éléments de $E_{a_0,\ldots,a_n}$. Par conséquent, c'est une base de $E_{a_0,\ldots,a_n}$, et les éléments de $E_{a_0,\ldots,a_n}$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme φ_a. On conclut en remarquant que toute fonction affine par morceaux est dans un espace de la forme $E_{a_0,\ldots,a_n}$.

(b) On considère d'abord une fonction affine g telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(grâce à la question 1.(b)). Par la question précédente, on peut écrire $g(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i |t - a_i|$. On considère enfin n polynômes $(P_i)_{i=1\ldots,n}$ tels que $\sup_{t\in[0,1]} |P(t) - |t - a_i|| \leq \frac{\varepsilon}{n|\lambda_i|}$ (il n'y a pas d'obstacle à supposer $\lambda_i \neq 0$). On pose $P(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(t)$, de sorte que

$$|g(t) - P(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \Big||x - a_i| - P_i(t)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $t \in [0,1]$. On a finalement $|f(t) - P(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - P(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme à coefficients réels P tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - P(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit n le degré du polynôme P. On écrit alors

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n.$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $n+1$ rationnels q_0,..., q_n tels que $|a_i - q_i| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$. Posons alors

$$Q(t) = q_0 + \ldots + q_n t^n.$$

On a alors, pour tout $t \in [0,1]$

$$|P(t) - Q(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(a_k - q_k)t^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - q_k|\, t^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - q_k| \leq (n+1)\frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De sorte que $|f(t) - Q(t)| \leq |f(t) - P(t)| + |P(t) - Q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

5. Considérons la fonction f continue sur $[0,1]$ définie par $f(t) = \frac{1}{2}$ quel que soit $t \in [0,1]$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients entiers, les réels $P(0) = a_0$ et $P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sont en fait des entiers. Par conséquent, on a $|P(0) - f(0)| = |P(0) - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$. Le théorème de Stone-Weierstrass ne peut donc pas être vrai dans ce cadre.

6. (a) Le polynôme P_0 est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De plus, si P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n)$ est un produit de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et est donc à coefficients dans $\mathbb{Z}$ lui aussi. Par récurrence, on peut donc conclure que P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ quel que soit n.
   (b) Par une étude de fonction, on montre que $\Phi : t \mapsto 2t(1-t)$ envoie $]0,1[$ sur $]0, \frac{1}{2}]$. Par conséquent, $P_0(t) = \Phi(t)$ appartient à $]0, \frac{1}{2}]$ quel que soit $t \in]0,1[$. De plus, la suite $P_n(t)$ est définie par $P_{n+1}(t) = \Phi(P_n(t))$, où Φ envoie $]0, \frac{1}{2}]$ dans $]0, \frac{1}{2}]$, si bien que la suite $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0, \frac{1}{2}]$. Une étude de fonction montre que pour $t \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $t \leq \Phi(t)$, de sorte que la suite $P_n(t)$ est croissante. Elle est de plus bornée. Elle converge donc vers une limite $\lambda \in]0, \frac{1}{2}]$ vérifiant $\lambda = 2\lambda(1-\lambda)$. Par conséquent, on a $\lambda = \frac{1}{2}$.
   (c) La fonction Φ définie à la question précédente est croissante de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, le point où le polynôme P_n atteint son minimum sur l'intervalle $[\eta, 1-\eta]$ est donc indépendant de n. Or on remarque que P_0 atteint son minimum relatif à $[\eta, 1-\eta]$ en η. On en déduit, par croissance de la suite $P_n(t)$ que pour $t \in [\eta, 1-\eta]$,

$$\left|\frac{1}{2} - P_n(t)\right| = \frac{1}{2} - P_n(t) \leq \frac{1}{2} - \min P_n(t) = \frac{1}{2} - P_n(\eta).$$

7. Soit α un réel. Si $2^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, le réel $p2^{-n}$ avec $p = E(2^n\alpha)$ vérifie $|p2^{-n} - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Choisissons, grâce à la question précédente, un polynôme P à coefficients entiers tel que $\left|P(t) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)p}$ et $0 \leq P(t) \leq 1$ pour tout $t \in [\eta, 1-\eta]$. On a alors[1] $|pP^n(t) - p2^{-n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $t \in [\eta, 1-\eta]$, de sorte que pour $t \in [\eta, 1-\eta]$, on ait $|pP^n(t) - \alpha| \leq |pP^n(t) - p2^{-n}| + |p2^{-n} - \alpha| \leq \varepsilon$.

8. On considère tout d'abord un polynôme $P = a_0 + a_1X ... + a_nX^n$ tel que $\sup_{t\in[0,1]} |P(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On considère ensuite $n+1$ polynômes à coefficients entiers A_i tels que $\sup_{t\in[\eta,1-\eta]} |A_i(t) - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$. Le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} A_i X^i$ convient alors.

[1] On utilise l'inégalité, vraie pour $0 \leq a, b \leq 1$, $|a^n - b^n| = |a-b| \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \leq |a-b|(n+1)$