

EXAMEN FINAL
DURÉE : 5H

Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre. Au sein d'une partie, il est recommandé de traiter toutes les questions à la suite plutôt que de manière éparse. Toutefois, vous pouvez si nécessaire admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Le sujet probabilités (parties I et II) sera noté sur 15 points, le sujet analyse (parties III et IV) sera noté sur 45 points. **Les sujets analyse et probabilités devront être traités sur des copies distinctes.**

Il n'est pas nécessaire de traiter la totalité du sujet pour avoir la note maximale.

Partie I - Probabilités

D'après le Concours d'admission 2011, E.S.C.P./EUROPE, Option technologique, Mathématiques.

On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne,
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'évènement "on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i -ième tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n -ième tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace. On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\{X_n = 0\} \\ \mathbb{P}\{X_n = 1\} \\ \mathbb{P}\{X_n = 2\} \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer pour tout entier naturel n , l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0$, $n = 1$, $n \geq 2$).
- (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$U_{n+1} = M U_n.$$

Vérifier que l'égalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- (c) Calculer $M V_1$, $M V_2$ et $M V_3$.

(d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3.$$

(e) Donner la loi de la variable aléatoire X_n .

2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer la loi de T_1 . Donner le nom de la loi de T_1 .
4. Écrire les évènements $\{T_2 = 2\}$ et $\{T_2 = 3\}$ à l'aide de certains évènements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[\{T_2 = 2\}]$ et $\mathbb{P}[\{T_2 = 3\}]$.
5. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'évènement $\{T_2 = n\}$ en fonction des évènements $\{X_{n-1} = 1\}$ et $\{X_n = 0\}$.
(b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}[\{T_2 = n\}] = 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right].$$

Partie II - Probabilités (Cours)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire discret défini sur Ω . On suppose la loi du couple connue. Donner la définition des *lois marginales de Z* , ainsi qu'une expression en fonction de la loi du couple.
2. Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans :

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2),$$

respectivement avec les probabilités $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Partie III - Analyse

Dans cette partie, on désignera par le terme de *séries semi-convergentes* les séries $\sum u_n$ qui sont convergentes mais pas absolument convergentes, c'est-à-dire telles que $\sum |u_n|$ ne soit pas convergente.

Le but de la partie est d'illustrer une différence fondamentale entre, d'une part, les séries réelles absolument convergentes et, d'autre part, les séries réelles semi-convergentes.

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ soit convergente et soit σ une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

(a) Pour tout entier N , montrer l'inégalité

$$\sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(b) En déduire que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente et que sa somme est donnée par $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum u_n$ soit absolument convergente et soit σ une bijection de \mathbb{N} dans lui-même.

(a) Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \leq \varepsilon$.

(c) Établir l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

On pourra utiliser, après justification, l'écriture

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n) < n_0} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n) \geq n_0},$$

et montrer les égalités $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n) < n_0} = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{\sigma(n)}| \mathbf{1}_{\sigma(n) \geq n_0} = \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$.

On a donc montré que la somme d'une série *absolument convergente* ne changeait pas après permutation des indices. On va voir ce qu'il en est pour les séries qui ne sont pas absolument convergentes.

3. Commençons par étudier un exemple de série semi-convergente.

(a) Montrer l'encadrement

$$\forall x \in]1, \infty[, \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1).$$

On pourra comparer les positions relatives du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et de ses tangentes.

(b) En déduire que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, avec l'équivalent $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln(N)$.

(c) En récrivant $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, puis en fonction de $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$, montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.

On a donc trouvé une série convergente, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, qui n'est pas absolument convergente.

Définissons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ de la manière suivante :

$$v_n = \begin{cases} -\frac{1}{2k} & \text{si } n = 3k, \\ \frac{1}{4k+1} & \text{si } n = 3k+1, \\ \frac{1}{4k+3} & \text{si } n = 3k+2. \end{cases}$$

4. (a) Montrer que la fonction φ définie pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 3k, \\ 4k+1 & \text{si } n = 3k+1, \\ 4k+3 & \text{si } n = 3k+2, \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans lui-même telle que $v_n = \frac{(-1)^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)}$. On pourra décomposer \mathbb{N} en une union disjointe de trois ensembles.

(b) Montrer que la série $\sum (v_{3n+1} + v_{3n+2} + v_{3n+3})$ est convergente. En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.

(c) Exprimer la quantité $\sum_{n=1}^{3N} v_n$ en fonction de $\sum_{n=1}^{4N} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, puis en fonction de $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=2N+1}^{4N} \frac{1}{n}$.

(d) Quelle est la somme de la série $\sum v_n$? Vérifier que cette somme est distincte de la somme de $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On a donc construit une bijection φ de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que les deux séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^{\varphi(n)}}{\varphi(n)}$ soient convergentes, mais aient des sommes différentes.

5. On va s'intéresser à la sommation des termes $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ dans l'ordre suivant :

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{31}\right) - \frac{1}{10} + \dots \quad (1)$$

Autrement dit, après le terme d'ordre $2n$, on ajoute tous les termes d'ordre impairs entre 2^n et 2^{n+1} .

- (a) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^n + 2k + 1}$. Montrer que $L_n \geq \frac{1}{4}$.
- (b) Montrer, pour $n \geq 3$, l'inégalité $-\frac{1}{2^n} + L_n \geq \frac{1}{12}$.
- (c) En déduire que la série (1) est divergente.

On voit donc que la propriété d'invariance de la somme après changement d'indice ne se généralise pas aux séries qui ne sont pas absolument convergentes. Il se peut même que la série obtenue ne soit pas convergente ! Il s'agit en réalité d'un fait général : étant donnée une série semi-convergente quelconque, et un élément x de $[-\infty, \infty]$, il est possible de réordonner les termes de la série pour obtenir une série de somme x .

Partie IV - Analyse

Dans cette partie, on va démontrer le résultat suivant sur les séries trigonométriques, appelé *théorème d'unicité de Cantor*.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si, pour tout réel x , la série $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge vers 0, alors on a $a_n = b_n = 0$ pour tout n .

On dira qu'une fonction f admet une dérivée seconde généralisée au point a si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite sera notée $D^2 f(a)$.

1. Dans cette question, f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur voisinage d'un point a . Montrer que f admet une dérivée seconde généralisée en a .
2. Dans cette question, on suppose que f est une fonction définie au voisinage d'un point a , qu'elle admet une dérivée seconde généralisée en a , et que le point a est un minimum local pour la fonction f . Montrer que $D^2 f(a) \geq 0$.
3. Dans cette question, on considère une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$. On suppose que la fonction f admet une dérivée seconde généralisée qui est nulle sur tout l'intervalle $]a, b[$:

$$\forall x \in]a, b[, D^2 f(x) = 0.$$

- (a) Soit ε un réel. On considère la fonction g_ε définie sur $]a, b[$ par la formule

$$g_\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \varepsilon \frac{(x - a)(b - x)}{2}.$$

Montrer que $D^2 g_\varepsilon$ existe en tout point de $]a, b[$ et donner sa valeur.

- (b) Montrer que si $\varepsilon > 0$, alors g_ε atteint son minimum relatif à l'intervalle $]a, b[$ en a ou en b . Inversement, montrer que si $\varepsilon < 0$, alors g_ε atteint son maximum relatif à l'intervalle $]a, b[$ en a ou en b .
- (c) En déduire que f est une fonction affine.

4. Montrer que l'on a l'égalité entre fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = \rho \cos(x + \lambda)$$

si et seulement si les réels α , β , ρ et λ vérifient la relation $\frac{\alpha - i\beta}{2} = \rho e^{i\lambda}$.

On fixe maintenant deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. La question précédente permet d'écrire $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \rho_n \cos(nx + \lambda_n)$. Montrer que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers 0.
6. Dans cette question, on suppose que la suite $(\rho_n \cos(nx + \lambda_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, quel que soit $x \in [0, 2\pi]$.
 - (a) Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx + \lambda_n) dx.$$

(b) En déduire que ρ_n converge vers 0 (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée¹).

À partir de maintenant, on suppose que la série $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge quel que soit le réel x .

7. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0.

8. Montrer que la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$$

est bien définie sur \mathbb{R} tout entier.

9. Dans cette question, on notera pour $x \neq 0$, $\theta(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$.

(a) Montrer que la fonction θ peut se prolonger par continuité sur \mathbb{R} (on notera toujours θ son prolongement continu). Montrer que θ (une fois prolongée à \mathbb{R}) est de classe C^1 sur tout \mathbb{R} .

(b) Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que pour tout réel non-nul h , la série $\sum u_n \theta(nh)$ est convergente.

(c) Montrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \theta(nh) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \theta(h) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right) (\theta(nh) - \theta((n-1)h)).$$

(d) En déduire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \theta(nh) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

On admettra que, quel que soit $n_0 \geq 2$, la quantité $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\theta(nh) - \theta((n-1)h)|$ converge (en $h \rightarrow 0$) vers $\int_0^{\infty} |\theta'(x)| dx$, cette intégrale étant finie.

(e) Montrer que la fonction φ admet en tout point une dérivée seconde généralisée que l'on calculera.

10. Soit γ une fonction bornée. Montrer l'égalité

$$\int_0^{2\pi} \gamma(x) \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \gamma(x) \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) dx.$$

On pourra majorer les restes de la série définissant $\varphi(x)$ indépendamment de x .

11. (a) Montrer que φ prend nécessairement la forme $\varphi(x) = a_0 \frac{x^2}{2} + bx + c$, puis montrer que a_0 , b et c sont nuls.

(b) En déduire que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nulles. On pourra calculer les quantités $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \varphi(x) dx$ et $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \varphi(x) dx$.

12. Montrer que si les séries $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ et $\sum \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)$ sont convergentes pour tout x de \mathbb{R} et vérifient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\alpha_n = a_n$ et $\beta_n = b_n$ pour tout n .

¹Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$, et si $|f_n| \leq g$ (les fonctions f , f_n et g étant intégrables sur $[a, b]$), alors, $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.