Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1$^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

Examen final
Corrigé de la partie analyse

Partie III

1. (a) On pose $M_N = \max\{\sigma(n),\ n \in \{0,\dots,N\}\}$. Quel que soit $n \in \{0,\dots,N\}$, on a $\sigma(n) \leq M_N$, par conséquent, on a l'inclusion

$$\{\sigma(n),\ n \in \{1,\dots,N\}\} \subset \{0,\dots,M_N\}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{M_N} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La dernière inégalité vient de la croissance de la suite des sommes partielles de $\sum a_n$, qui vient de la positivité des a_n.

(b) On a une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. Elle est donc convergente. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

En raisonnant de la même manière sur la suite à termes positifs $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et sur la bijection $\sigma^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

ce qui montre l'égalité des deux sommes.

2. (a) On applique le résultat de la question précédente à la suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$: on en déduit que la série $\sum |u_{\sigma(n)}|$ converge.

(b) Les restes d'une série convergente tendent vers 0, ce qui montre que pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $\left(\sum_{n=N}^{\infty} |u_n|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $[0,\varepsilon]$ à partir d'un certain rang n_0.

(c) On a l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)<n_0} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0}$, dûe au fait que les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)<n_0}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0}$ sont convergentes (puisque leurs termes sont majorés en valeur absolue par $|u_{\sigma(n)}|$ qui est le terme général d'une série convergente) et de l'égalité $u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0} + u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)<n_0} = u_{\sigma(n)}$. L'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)<n_0} = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$ est dûe au fait que la somme est finie (puisque σ est une bijection), et l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{\sigma(n)}| \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0} = \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ vient du résultat de la question 1 sur les séries positives. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}\right| &\leq \left|\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)<n_0}\right| + \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0}\right| \\
&\leq 0 + \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |u_{\sigma(n)}| \mathbf{1}_{\sigma(n)\geq n_0} \\
&= 0 + 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout ε, on obtient l'égalité des deux sommes.

3. (a) La convexité de la fonction logarithme (ou une simple étude de fonction) donne l'inégalité $\ln(1+y) \leq y$ quel que soit $y > -1$, de sorte que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$. Or, on a $\ln(1+x)-\ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. De même, on a $-(\ln(1+x)-\ln(x)) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{1+x}\right) \leq -\frac{1}{1+x}$. On a donc bien l'inégalité cherchée.

   (b) En sommant l'inégalité précédente pour $x = 1, \ldots, N-1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n+1) - \ln(n))}_{=\ln(N)} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n},$$

   de sorte que $\ln(N)+\frac{1}{N} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln(N)-1$, ce qui montre bien l'équivalent $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln(N)$ et, par là, la divergence de la série.

   (c) On écrit

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

   L'inégalité de la question 3.(a) donne alors

$$\begin{aligned}\underbrace{\ln(2N+1) - \ln(N+1)}_{\to \ln(2)} = \sum_{n=N+1}^{2N} \ln(n+1) - \ln(n) \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \ln(n) - \ln(n-1) \\ = \ln(2N) - \ln(N) \\ = \ln(2),\end{aligned}$$

   ce qui montre le résultat.

4. (a) Tout d'abord, on remarque qu'en considérant les restes de la division Euclidienne par 3, on peut décomposer $\mathbb{N}$ sous la forme d'une union disjointe $\mathbb{N} \setminus \{0\} = A \cup B \cup C$ avec

$$A = \{3k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \quad ; \quad B = \{3k+1,\ k \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad C = \{3k+2,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

   De même, en considérant les restes de la division Euclidienne par 4, on met $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sous la forme d'une union disjointe

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C},$$

   avec

$$\tilde{A} = \{2k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \quad ; \quad \tilde{B} = \{4k+1,\ k \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad \tilde{C} = \{4k+3,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

   Il est alors clair que φ envoie bijectivement A sur $\tilde{A}$, B sur $\tilde{B}$ et C sur $\tilde{C}$.
   L'égalité $v_n = \frac{(-1)^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)}$ est alors une simple vérification.

   (b) L'expression de v_n donne l'égalité

$$v_{3n+1} + v_{3n+2} + v_{3n+3} = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} = \frac{-8n-5}{(4n+1)(4n+3)(2n+2)} \sim \frac{-8n}{32n^3} \sim \frac{-1}{4n^2}.$$

   La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit la convergence de la série $\sum(v_{3n+1} + v_{3n+2} + v_{3n+3})$. On conclut que la série $\sum v_n$ converge par le fait que $\sum_{k=1}^{n} v_n - \sum_{k=1}^{3E(n/3)} v_n$ tend vers 0, puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

(c) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3N} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_{3n+1}+v_{3n+2}+v_{3n+3} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{4n+1}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{4n+3}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\\ &= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{4N}\frac{1}{n} \qquad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\ &= \left(\sum_{n=1}^{4N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}\right) \qquad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\ &= \sum_{n=2N+1}^{4N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(d) On a vu à la question 3.(c) que $\left(\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ tendait vers $\ln(2)$. Par conséquent, l'égalité montrée à la question précédente donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2N+1}^{4N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n} = \frac{3}{2}\ln(2).$$

5. (a) Le terme de la somme définissant L_n est minimal pour $k = 2^{n-1}-1$. La quantité L_n se minore donc par $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{2^n+2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$.

(b) Pour $n \geq 3$, on a $L_n - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

(c) Dans la série (1), on somme une infinité de termes supérieurs à $\frac{1}{12}$. Par conséquent les sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Partie IV

1. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de a, on peut alors écrire, pour $h \to 0$, $f(a+h) = f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)$. De même, on a $f(a-h) = f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)$. On trouve donc

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} &= \frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-2f(a)+o(h^2)}{h^2}\\ &= \frac{h^2f''(a)+o(h^2)}{h^2}\\ &= f''(a)+o(1).\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f admet une dérivée seconde généralisée, donnée par $D^2f(a) = f''(a)$.

2. Si f est un minimum local pour f, alors pour h assez petit, on a $f(a) \leq f(a+h)$ et $f(a) \leq f(a-h)$. par conséquent, $f(a+h)+f(a-h)-2f(a) \geq 0$, ce qui montre que

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} \geq 0.$$

En passant à la limite, on trouve $D^2f(a) \geq 0$.

3. (a) On remarque tout d'abord que si deux fonctions φ et ψ admettent une dérivée seconde généralisée en un même point a, alors leur somme admet également une dérivée seconde généralisée en ce point donnée par $D^2(\varphi+\psi)(a) = D^2\varphi(a)+D^2\psi(a)$. Or $g_\varepsilon = f+(g_\varepsilon-f)$, et $(g_\varepsilon-f)$, étant un un polynôme de degré 2, il est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet donc une dérivée seconde généralisée. La dérivée seconde généralisée est donnée par

$$D^2g_\varepsilon(x) = D^2f(x)+D^2(g_\varepsilon-f)(x) = 0+(f-g_\varepsilon)''(x) = -\varepsilon.$$

(b) Si g_ε admettait son minimum (resp. maximum) relatif à $[a,b]$ en un point x de $]a,b[$, alors x serait un minimum (resp. maximum) local de g_ε, et on aurait $D^2 g_\varepsilon(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0). Or on viens de montrer l'égalité $D^2 g_\varepsilon(x) = -\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ (reps. $\varepsilon < 0$), on arrive donc à une contradiction, et g_ε atteint son minimum (resp. maximum) relatif à $[a,b]$ en un des points a ou b.

(c) On remarque que, quel que soit ε, on a l'égalité $g_\varepsilon(a) = g_\varepsilon(b) = 0$. La fonction g_ε est donc positive (resp. négative) si $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$).Le résultat de la question précédente montre alors

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq \frac{-\varepsilon(x-a)(b-x)}{2}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve $f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. De même, le cas $\varepsilon < 0$ montre $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, ce qui donne

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

La fonction f est donc bien affine.

4. En utilisant la formule d'Euler, on trouve

$$\alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = \alpha\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \beta\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \left(\frac{\alpha - i\beta}{2}\right)e^{ix} + \left(\frac{\alpha + i\beta}{2}\right)e^{-ix}.$$

En écrivant $\alpha - i\beta = \rho e^{i\lambda}$, on a alors

$$\alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = \frac{\rho e^{i\lambda}e^{ix} + \rho e^{-i\lambda}e^{-ix}}{2} = \rho\cos(x+\lambda).$$

Par conséquent, si on a l'égalité $\alpha - i\beta = \rho e^{i\lambda}$, alors on a l'égalité entre fonctions

$$\alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = \rho\cos(x+\lambda).$$

Inversement, si on a l'égalité des fonctions, alors, en prenant $x = 0$, on obtient $\alpha = \rho\cos(\lambda)$ et prenant $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\beta = -\rho\sin(\lambda)$. On a donc $\alpha - i\beta = \rho e^{i\lambda}$.

5. La formule précédente étant vraie si et seulement si $\alpha - i\beta = \rho e^{i\lambda}$ on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\text{“}(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \quad \texttt{et} \quad (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\text{”} &\Leftrightarrow \text{“}(\alpha_n - i\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\text{”} \\
&\Leftrightarrow \text{“}(\rho_n e^{i\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0\text{”} \\
&\Leftrightarrow \text{“}(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\text{”}.
\end{aligned}$$

6. (a) En utilisant la formule $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, on trouve

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2nx+2\lambda_n))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2nx+2\lambda_n)}{2n}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

(b) Le théorème de convergence dominée montre, puisque la fonction $\cos^2$ est majorée par 1 et que la quantité $\rho_n\cos(2nx+\lambda_n)$ tend vers 0 quel que soit x, que l'intégrale $\int_0^{2\pi}\rho_n\cos^2(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Or on a montré à la question précédente que cette intégrale valait $\pi\rho_n$. Par conséquent, la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

7. Comme la série $\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ converge pour tout x, la suite $(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, quel que soit x. En écrivant $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) = \rho_n\cos(nx+\lambda_n)$, et en appliquant le résultat de la question 6., on voit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après la question 5., les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.

8. La question précédente montre que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0. Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a les comparaisons

$$\frac{a_n}{n^2}\cos(nx) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b_n}{n^2}\sin(nx) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce qui montre que la série définissant φ est convergente, de sorte que $\varphi(x)$ est bien défini, quel que soit x.

9. (a) La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Un développement limité en 0 donne $\theta(x) = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$. La fonction θ peut donc se prolonger par continuité en 0 en posant $\theta(0) = -\frac{1}{2}$. De plus θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec

$$\theta'(x) = \frac{-\sin(x)}{x^2} - 2\frac{\cos(x)-1}{x^3}.$$

En $x = 0$, le taux d'accroissement est donné par

$$\frac{\theta(h)-\theta(0)}{h} = \frac{\cos(h)-1}{h^3} + \frac{1}{2h} = \frac{1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)-1}{h^3} + \frac{1}{2h} = o(1).$$

Par conséquent θ est dérivable en 0 de dérivée $\theta'(0) = 0$. Or, on a, pour $x \neq 0$

$$\theta'(x) = \frac{-\sin(x)}{x^2} - 2\frac{\cos(x)-1}{x^3} = \frac{-x+o(x^2)}{x^2} - 2\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-1}{x^3} = o(1).$$

On a donc $\theta'(0) = 0 = \lim_{x\to 0}\theta'(x)$, ce qui fait que θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) La série $\sum u_n$ étant convergente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Par conséquent, elle est bornée, et on a donc la majoration $\left|u_n\frac{\cos(nh)-1}{n^2h^2}\right| \leq \frac{2\max_n|u_n|}{h^2n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum u_n\theta(nh)$ converge.

(c) On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n\theta(nh) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\right)\theta(nh)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)\theta(nh) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\right)\theta(nh)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)\theta(nh) - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)\theta((n-1)h)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k\right)\frac{\cos(h)-1}{h^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)(\theta(nh)-\theta((n-1)h)).
\end{aligned}$$

(d) On remarque tout d'abord que d'après la question 8.(a), $2\theta(h)\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge vers $-\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ quand h tend vers 0. Il reste donc à montrer que le deuxième terme tend vers 0. Soit ε un réel positif. Comme la série $\sum u_n$ est convergente, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}u_n\right| \leq \varepsilon$. On a alors, d'une part

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=2}^{n_0-1}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)(\theta(nh)-\theta((n-1)h)) = \sum_{n=2}^{n_0-1}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)(\theta(0)-\theta(0)) = 0$$

(le passage à la limite est autorisé par le fait que la somme est finie), et d'autre part

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)(\theta(nh)-\theta((n-1)h))\right| \leq \varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}|\theta(nh)-\theta((n-1)h)|,$$

qui converge, quand h tend vers 0, vers $\varepsilon\int_0^{\infty}|\theta'(x)|\mathrm{d}x$. Par conséquent, on a la majoration

$$\limsup_{h\to 0}\left|\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)(\theta(nh)-\theta((n-1)h))\right| \leq \varepsilon\int_0^{\infty}|\theta'(x)|\mathrm{d}x,$$

et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$. On achève la preuve en passant à la borne inférieure en ε.

(e) Soit a un nombre réel. La linéarité de la somme de séries convergentes donne

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(a+h)+\varphi(a-h)-2\varphi(a)}{h^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\frac{\cos(na+nh)+\cos(na-nh)-2\cos(na)}{h^2}\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\frac{\sin(na+nh)+\sin(na-nh)-2\sin(na)}{h^2}.
\end{aligned}$$

On écrit alors

$$\cos(na+nh)+\cos(na-nh)-2\cos(na)=2\cos(na)\left(\cos(nh)-1\right)$$

et

$$\sin(na+nh)+\sin(na-nh)-2\sin(na)=2\sin(na)\left(\cos(nh)-1\right),$$

de sorte que

$$\frac{\varphi(a+h)+\varphi(a-h)-2\varphi(a)}{h^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(na)+b_n\sin(na))\frac{2(\cos(nh)-1)}{n^2h^2}.$$

La question précédente montre finalement

$$D^2\varphi(a)=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(na)+b_n\sin(na).$$

10. On a, quel que soit l'entier N,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{2\pi}\gamma(x)\varphi(x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x\right|\\
&=\left|\int_0^{2\pi}\gamma(x)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x\right|\\
&=\left|\int_0^{2\pi}\gamma(x)\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x-\sum_{n=N}^{\infty}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x\right|\\
&\leq 4\pi\sup_{x\in[0,2\pi]}|\gamma(x)|\left(\sup|a_n|+\sup|b_n|\right)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Or, pour $\varepsilon>0$ fixé, il existe N tel que

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq\frac{\varepsilon}{4\pi\sup_{x\in[0,2\pi]}|\gamma(x)|\left(\sup|a_n|+\sup|b_n|\right)},$$

de sorte que

$$\left|\int_0^{2\pi}\gamma(x)\varphi(x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x\right|\leq\varepsilon.$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon>0$, on a le résultat demandé.

11. (a) La question précédente montre que la fonction $x\mapsto\varphi(x)-a_0\frac{x^2}{2}$ a une dérivée seconde généralisée donnée par

$$-\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)-a_0=-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=0.$$

D'après la question 3. cela montre que $x\mapsto\varphi+a_0\frac{x^2}{2}$ est une fonction affine, et donc que l'on peut écrire $\varphi(x)=-a_0\frac{x^2}{2}+bx+c$. La fonction φ étant clairement 2π-périodique, on obtient que $a_0=b=0$. Par conséquent, φ est une constante.
Finalement, on calcule (l'intervertion somme-intégrale est autorisée grâce à la question précédente)

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x=c2\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x+\frac{b_n}{n^2}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x=0,$$

d'où $c=0$.

(b) On calcule (l'intervertion somme-intégrale étant toujours autorisée grâce à la question 9.)

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(mx)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\int_0^{2\pi} a_n \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} b_n \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\pi a_m}{m^2},
\end{aligned}$$

de sorte que $a_m = 0$. De même, le calcul de $\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin(mx)\mathrm{d}x$ montre que $b_m = 0$.

12. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la série $\sum\left((a_n - \alpha_n)\cos(nx) + (b_n - \beta_n)\sin(nx)\right)$ qui converge pour tout x vers 0.