Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

Formulaire de trigonométrie

1 Fonctions trigonométriques

La résolution de l'équation différentielle $y' = y$, avec la condition $y(0) = 1$ amène naturellement à la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

La série (1) est absolument convergente pour tout nombre complexe z, de sorte que e^z est défini pour tout z. De plus, on voit que

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k {z'}^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{{z'}^{n-k}}{(n-k)!}$$

est le produit de Cauchy des séries (absolument convergentes) e^z et $e^{z'}$, de sorte que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. Cette égalité justifie a posteriori la notation e^z. La série (1) convergeant uniformément sur tout compact et étant égale à sa série dérivée, la fonction exponentielle est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $y' = y$.

L'équation (1) montre que pour x réel, $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, ce qui donne $|e^{ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = 1$. Pour x réel, e^{ix} appartient donc au cercle unité.

On définit les fonctions cos, sin et tan par les formules

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \mathrm{Re}(e^{ix}), \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{ix}) \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On a notamment

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

et les développements en série

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En dérivant, on trouve de plus

$$\cos'(x) + i\sin'(x) = (e^{ix})' = ie^{ix} = -\sin(x) + i\cos(x),$$

de sorte que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

La série définissant le cosinus étant alternée, on peut estimer les valeurs prises par cos, notamment $\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} < 0$. Comme cos est une fonction continue vérifiant $\cos(0) = 1$, il existe un plus petit réel positif x tel que $\cos(x) = 0$. Ce nombre est noté $\pi/2$.

On a alors $1 = |e^{ix}| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$. De plus, sin a une dérivée positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si bien que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, et donc $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Par conséquent, $e^{2i\pi} = i^4 = 1$, ce qui fait que la fonction exponentielle est 2π-périodique.

2 Sommes et produits

Les relations $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ permettent de démontrer les relations suivantes.

Angle somme :

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$;
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;
- $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$;

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$;
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

Linéarisation d'un produit :

- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$;
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x-y))$;
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Factorisation d'une somme :

- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x) + \cos(y) = -2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

Formules utilisant la tangente de l'arc moitié :

- $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
- $\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$;
- $\tan(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$.

Ces dernières formules fournissent notamment une paramétrisation du cercle par des fractions rationnelles

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

On peut exprimer $\cos(nx)$ comme un polynôme en $\cos(x)$:

$$\cos(nx) = T_n(\cos(x)),\ \text{où } T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

(les T_n sont appelés *polynômes de Tchebychev*).
Formule de De Moivre :

$$(\cos(a) + i\cos(b))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

On peut linéariser les puissances de cos et sin, ainsi que leur produits :

$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ix(2k-n)},$$

$$\sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{2i^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} e^{ix(2k-n)}.$$

3 Valeurs particulières

La définition du nombre π donnée en partie 1 et les relations de la partie 2 permettent de montrer les relations suivantes, qui se vérifient simplement sur le cercle trigonométrique.

- $\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$;
- $\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x)$;
- $\tan(x) = \tan(x + \pi) = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x)$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

- $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, d'où l'on déduit $\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$.

On peut donner explicitement quelques valeurs pour le cosinus

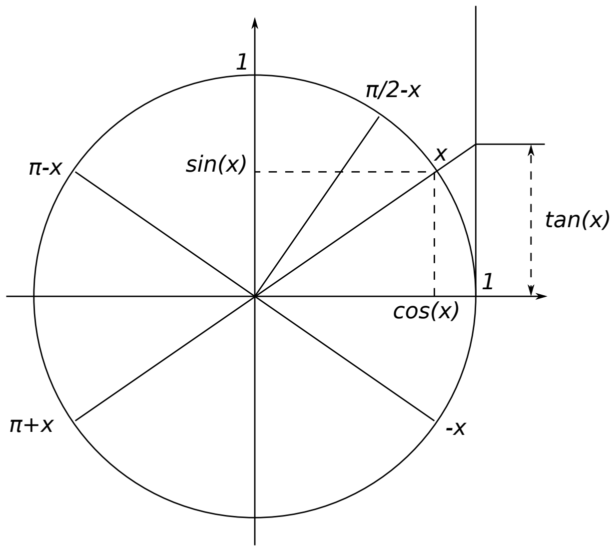
$$\cos(0)=1\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ ;$$

pour le sinus

$$\sin(0)=0\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ ;$$

et pour la tangente

$$\tan(0)=0\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\ ;\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{ indéterminé.}$$



4 Fonctions réciproques

La fonction sin est bijective de tout intervalle de la forme $[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$. On note arcsin sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
La fonction cos est bijective de tout intervalle de la forme $[k\pi,(k+1)\pi]$ dans $[-1,1]$. On note arccos sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.
La fonction tan est bijective de tout intervalle de la forme $]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa réciproque de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Ces trois fonctions vérifient les formules suivantes :

$$\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2},\ \ \arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\arctan(x)=\text{signe}(x)\frac{\pi}{2}.$$

$$\arctan(x)+\arctan(y)=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+k\pi,$$

où $k=1$ si $xy>1$ et $x>0$; $k=-1$ si $xy>1$ et $x<0$; $k=0$ si $xy<1$.

5 Dérivées

Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$.
La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et π-périodique de $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{R}$.
Les dérivée des fonctions trigonométriques sont données par

$$\sin'(x)=\cos(x),\ \ \cos'(x)=-\sin(x),\ \ \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x),$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction tan étant de la forme $\frac{u'}{u}$, on a $\tan(x) = (\ln|\cos(x)|)'$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

6 Développements limités

On peut enfin donner quelques développements limités

- $e^x = 1 + x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ (définition) ;
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$ (partie réelle) ;
- $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (partie imaginaire) ;
- $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$ (pas de formule explicite simple) ;
- $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{(2n+1)\prod_{k=1}^n (2k)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (primitive de $(1-x^2)^{-1/2}$) ;
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \ldots - \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{(2n+1)\prod_{k=1}^n (2k)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (primitive de $-(1-x^2)^{-1/2}$) ;
- $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (primitive de $(1+x^2)^{-1}$).