Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1ère année - CAPES
2012 - 2013

Interrogation
Durée : 45 minutes

Question 1

Parmi les séries suivantes lesquelles sont convergentes ?

$$\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}} \quad ; \quad \sum 2^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad ; \quad \sum \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Question 2

On pose pour tous $n \geq 1$ et $p \geq 1$ entiers,

$$u_n^p = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} & \text{si} \quad n \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Étudier la convergence des doubles séries $\sum_n \left(\sum_p u_n^p \right)$ et $\sum_p \left(\sum_n u_n^p \right)$. En déduire un argument montrant que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Question 3

En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que la série $\sum n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -1$. Donner un équivalent (en $n \to \infty$) de $\sum_{k=1}^{n} n^\alpha$ dans le cas $\alpha \geq -1$ et un équivalent (en $n \to \infty$) de $\sum_{k=n}^{\infty} n^\alpha$ dans le cas $\alpha < -1$. Sous quelle condition sur β la série $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\beta}$ est-elle convergente ?