Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1$^{\text{ère}}$ année - CAPES
2012 - 2013

Interrogation n$^{\text{o}}$3
Correction

Question 1

Comme $\ln(n)$ tend vers $+\infty$, on a l'inégalité $\ln(n) \geq 2$ pour n assez grand (pour $n \geq 7$, en fait). On a donc, pour n assez grand $\frac{1}{n^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (et que les deux séries sont à termes positifs), cela montre que la série $\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ est convergente.

Pour $\sum 2^{-\sqrt{n}}$, on remarque que $2^{-x} = o(x^{-4})$ pour $x \to \infty$, ce qui montre que pour n assez grand, on a $2^{-\sqrt{n}} \leq (\sqrt{n})^{-4} = n^{-2}$. Par conséquent, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs, $\sum 2^{-\sqrt{n}}$ est également convergente.

Pour la série $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, le plus simple est d'utiliser le critère de d'Alembert (en effet, la suite est positive). On pose $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, ce qui donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{4}.$$

La suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite strictement inférieure à 1. La série $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ est donc convergente.

Le cas de la série $\sum \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ se fait en utilisant le critère de Duhamel, qui est une version plus précise du critère de d'Alembert. En réutilisant les calculs précédents, on obtient, pour $v_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$,

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Dans ce développement, le coefficient dominant est 1 et le coefficient de $\frac{1}{n}$ (qui vaut $\frac{1}{2}$) est strictement supérieur à -1. Par conséquent la série diverge.

Pour ces deux dernières séries, on pouvait aussi appliquer la formule de Stirling, qui donnait

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}.$$

On voyait alors que la troisième série convergeait mais pas la quatrième.

Question 2

Étudions tout d'abord les sommes par rapport à p. On fixe donc un entier $n \geq 1$ et on regarde les sommes partielles de $p = 1$ à $p = P$. On a, puisque $u_n^p = 0$ quand $n > p$,

$$\sum_{p=1}^{P} u_n^p = \sum_{p=n}^{P}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{P+1}.$$

Lorsque P tend vers l'infini, cette suite converge vers $\frac{1}{n}$. Pour tout n, la série $\sum_p u_n^p$ est donc convergente en p et on a

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_n^p = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, on voit également que la série double $\sum_n \left(\sum_p u_n^p\right)$ est convergente si et seulement si la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est convergente.

Pour les sommes par rapport à n, on fixe un entier $p \geq 1$. Pour $n > p$, on a $u_n^p = 0$, par conséquent, si $N \geq p$, la somme partielle jusqu'à N est donnée par

$$\sum_{n=1}^{N} u_n^p = \sum_{n=1}^{p} u_n^p + \underbrace{\sum_{n=p+1}^{N} u_n^p}_{=0} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p} - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

Comme les sommes partielles en n sont constantes à partir d'un certain rang, la série $\sum_n u_n^p$ converge, quel que soit $p \geq 1$, et sa somme est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p = \frac{1}{p+1}.$$

De même que précédement, la série double $\sum_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p\right)$ est convergente si et seulement si la série $\sum \frac{1}{p+1}$ est convergente, ce qui revient à ce que la série $\sum \frac{1}{n}$ soit convergente.

Si la série $\sum \frac{1}{n}$ convergeait, alors le théorème de Fubini donnerait (puisque $u_n^p \geq 0$ quels que soient n et p) l'égalité des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_n^p = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_n^p.$$

Autrement dit, on aurait (en faisant le changement de variable $n = p + 1$ dans la dernière égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p+1} = -1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

On obtient donc une contradiction. On a donc montré que la série $\sum \frac{1}{n}$ divergeait de même que les séries $\sum_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p\right)$ et $\sum_n \left(\sum_{p=1}^{\infty} u_n^p\right)$.

Question 3

On doit distinguer plusieurs cas.

Si $\alpha \geq 0$, alors la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante de $[0, \infty[$ dans lui-même et on a donc, pour tout t dans $[n, n+1]$,

$$n^\alpha \leq t^\alpha \leq (n+1)^\alpha.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t sur $[n, n+1]$, on obtient

$$\underbrace{n^\alpha}_{=\int_n^{n+1} n^\alpha \mathrm{d}t} \leq \int_n^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leq \underbrace{(n+1)^\alpha}_{=\int_n^{n+1} (n+1)^\alpha \mathrm{d}t}.$$

Autrement dit, on a

$$\int_{n-1}^{n} t^\alpha \mathrm{d}t \leq n^\alpha \leq \int_n^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t.$$

Le cas $\alpha < 0$ se traite de manière similaire, mais cette fois-ci, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est *décroissante*, on obtient donc l'inégalité inverse :

$$\int_n^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leq n^\alpha \leq \int_{n-1}^{n} t^\alpha \mathrm{d}t.$$

- Pour $\alpha > -1$ on encadre donc $\sum_{n=2}^{N} n^\alpha$ par

  $$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t = \int_2^{N+1} t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_2^{N+1} = \frac{(N+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

  et

  $$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} t^\alpha \mathrm{d}t = \int_1^{N} t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{N} = \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

  Ces deux dernières expressions sont équivalentes à $\frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, qui tend vers ∞, ce qui permet de démontrer que $\sum n^\alpha$ diverge pour $\alpha > -1$, avec

  $$\sum_{n=1}^{N} n^\alpha \sim \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

- Pour $\alpha = -1$ on a le même encadrement, mais cette fois-ci, les intégrales $\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln N$ et $\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(N+1) - \ln 2$ sont équivalentes à $\ln(N)$. Par conséquent, $\sum n^{-1}$ diverge et

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-1} \sim \ln(N).$$

- Pour le cas $\alpha < -1$ on a l'inégalité

$$\frac{(N+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{M^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \int_M^{N+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leq \sum_{n=M}^{N} n^\alpha \leq \int_{M-1}^{N} t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(M-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \tag{1}$$

  Notamment, on voit (en prenant $M = 2$, et en se rappelant que $\alpha + 1 < 0$), que

$$\sum_{n=1}^{N} n^\alpha \leq \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \leq \frac{-1}{1+\alpha}.$$

  On a donc une série à termes positifs et à sommes partielles majorées. Par conséquent elle converge. De plus, en prenant la limite $M \to \infty$ dans (1), on trouve

$$-\frac{M^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \sum_{n=M}^{\infty} n^\alpha \leq -\frac{(M-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

  Comme les termes de gauche et de droite sont équivalents à $\frac{-M^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, on a l'équivalent

$$\sum_{n=M}^{\infty} \sim \frac{-M^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Pour savoir pour quelles valeurs de β la série $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\beta}$ converge, on utilise les équivalents précédents.

- Si $\beta < -1$, la suite $\sum_{k=1}^n k^\beta$ converge vers une limite finie, donc le terme général de la série $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\beta}$ ne tend pas vers 0. La série ne peut donc pas converger.
- Si $\beta = -1$, le terme général (positif) $\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\beta}$ est équivalent à $\frac{1}{\ln n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ ne converge pas, on en déduit que $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ ne converge pas.
- Si $\beta > -1$, on a montré l'équivalent $\sum_{k=1}^n k^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$. Par conséquent le terme général de $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\beta}$ est équivalent à $\frac{\beta+1}{n^{\beta+1}}$. Cette série converge donc si et seulement si $\beta > 0$.