

Université Pierre et Marie Curie
Master EF 1^{ère} année - CAPES
2012 - 2013
Analyse et probabilités

Cours d'analyse

Raphaël Roux *

*. raphael.roux@upmc.fr

Table des matières

1	Nombres réels	5
1.1	L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels	5
1.1.1	Les axiomes de Peano	5
1.1.2	Addition et multiplication	7
1.1.3	Bon ordre sur \mathbb{N}	9
1.1.4	Quelques autres types de récurrence	11
1.2	L'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs	12
1.3	Le corps \mathbb{Q} des rationnels	13
1.4	Le corps \mathbb{R} des réels	14
1.4.1	Définition axiomatique de \mathbb{R}	14
1.4.2	Une construction de \mathbb{R}	15
1.4.3	Unicité du corps des réels	17
1.4.4	Quelques propriétés en vrac	18
2	Suites numériques	21
2.1	Un peu de vocabulaire	21
2.2	Convergence des suites	21
2.3	Quelques critères de convergence	26
2.3.1	Suites monotones	26
2.3.2	Suites adjacentes	26
2.3.3	Suites de Cauchy	27
2.3.4	Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures	28
2.4	Relations de comparaison	30
2.5	Suites récurrentes	33
3	Séries numériques	35
3.1	Premières définitions	35
3.2	Séries à termes positifs	37
3.3	Séries à termes complexes	45
3.4	Séries doubles	47
4	Fonctions de la variable réelle	51
4.1	Étude locale des fonctions	51
4.2	Fonctions continues sur un intervalle	54

4.3	Dérivation	56
4.4	Comportement asymptotique des fonctions	60
4.4.1	Relations de comparaison	60
4.4.2	Développements limités	62
4.5	Développement de Taylor	63
4.5.1	Développement des fonctions usuelles	66
5	Intégration	67
5.1	Intégration sur un segment	67
5.2	Lien entre intégrale et primitive	72
5.3	Intégration sur un intervalle quelconque	74
5.4	Théorèmes de convergence	77
5.5	Intégrales dépendant d'un paramètre	78

Chapitre 1

Nombres réels

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est le cadre naturel de l'analyse. Dans ce chapitre, nous allons construire cet ensemble en partant de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels dont nous poserons l'existence comme axiome.

À partir de \mathbb{N} , nous pourrions construire l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs et l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels. L'ensemble \mathbb{Q} est le plus petit corps qui contienne \mathbb{N} , c'est à dire l'ensemble le plus simple dans lequel on puisse définir une addition, une soustraction, une multiplication et une division en se basant sur les nombres entiers.

L'ensemble \mathbb{Q} est également muni d'une structure d'ordre. Toutefois, il manque à \mathbb{Q} une certaine propriété relative à cette structure d'ordre, appelée complétude, ce qui fait que certains nombres qui "devraient" exister ne sont pas dans \mathbb{Q} . L'ensemble \mathbb{R} est construit à partir de \mathbb{Q} en rajoutant ces éléments. On obtient alors un corps, contenant strictement \mathbb{Q} , mais qui vérifie maintenant la propriété de complétude.

1.1 L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels

1.1.1 Les axiomes de Peano

L'ensemble \mathbb{N} est défini de manière axiomatique : on considère certaines propriétés de \mathbb{N} comme "évidentes", et on les suppose vraies. Le but va être de construire successivement \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} , à partir de ces quelques axiomes.

Définition 1.1.1. *On suppose qu'il existe un ensemble \mathbb{N} , un élément $0 \in \mathbb{N}$ et une fonction injective $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, appelée fonction successeur satisfaisant la propriété suivante, appelée propriété de récurrence :*

Si un sous-ensemble de \mathbb{N} contient 0 et est stable par s , alors il s'agit de \mathbb{N} tout entier.

Ces suppositions sont appelées *axiomes de Peano*. Un élément de \mathbb{N} est appelé *entier*, ou *entier naturel*.

Le caractère injectif de s entre \mathbb{N} et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ signifie que tout élément de \mathbb{N} a un successeur, que 0 n'est successeur d'aucun élément, et que deux éléments ayant le même successeur sont égaux.

Une première conséquence de cette définition est que l'on peut énumérer des éléments tous distincts de \mathbb{N} en considérant $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))),$ etc. L'axiome de récurrence dit que l'on obtient ainsi *tous* les entiers.

On note $s(0) = 1, s(1) = 2, s(2) = 3,$ etc. L'élément $s(n)$ aura vocation à représenter $n + 1$.

Propriété 1.1.2. *s est en fait une bijection entre \mathbb{N} et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'ensemble $\{0\} \cup s(\mathbb{N})$ contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments (puisqu'il contient les successeurs de tous les entiers). L'axiome de récurrence montre donc $\{0\} \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. \square

L'axiome de récurrence est très utile pour montrer des propriétés sur l'ensemble \mathbb{N} en l'utilisant de la manière suivante. On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dont on veut prouver qu'elle est vérifiée par tout entier naturel n . On considère alors l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\}.$$

Notre objectif est de montrer que $A = \mathbb{N}$. On prouve alors les deux propositions $\mathcal{P}(0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(s(n)). \quad (1.1)$$

Comme $\mathcal{P}(0)$ est vraie, on a $0 \in A$, et comme (1.1) est vraie, l'ensemble A est stable par s . L'axiome de récurrence permet de conclure que $A = \mathbb{N}$. Une démonstration suivant ce schéma est appelée *démonstration par récurrence*.

L'axiome de récurrence permet de définir des fonctions φ sur \mathbb{N} à partir de relations de la forme $\varphi(s(n)) = f(\varphi(n))$:

Propriété 1.1.3. *Soit E un ensemble, α un élément de E et f une fonction de E dans E . Il existe une unique fonction φ de \mathbb{N} dans E telle que :*

$$\varphi(0) = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(s(n)) = f(\varphi(n)).$$

Démonstration. – Pour l'unicité, on considère deux éventuelles fonctions φ et ψ vérifiant les conditions de l'énoncé. Il suffit de montrer que l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = \psi(n)\}$$

est égal à \mathbb{N} tout entier. On va procéder par récurrence : on a $\varphi(0) = \alpha = \psi(0)$, donc $0 \in A$. De plus, si $n \in A$, on a

$$\varphi(s(n)) = f(\varphi(n)) = f(\psi(n)) = \psi(s(n)).$$

On a donc $s(n) \in A$. L'ensemble A est donc stable par s , et donc $A = \mathbb{N}$.

– Passons maintenant à l'existence. On va construire le graphe d'une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. C'est à dire qu'on va construire un sous-ensemble \mathcal{G} de $\mathbb{N} \times E$ vérifiant la propriété^(note 1)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! x \in E, (n, x) \in \mathcal{G}, \quad (1.2)$$

(note 1). On rappelle que $\exists!x$ signifie "il existe un unique x tel que..."

c'est à dire que \mathcal{G} est le graphe d'une fonction. L'unique élément x de E tel que $(n, x) \in \mathcal{G}$ est à comprendre comme $\varphi(n)$. On voudra aussi que \mathcal{G} vérifie

$$(0, \alpha) \in \mathcal{G} \tag{1.3}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n, x) \in \mathcal{G} \Rightarrow (s(n), f(x)) \in \mathcal{G}, \tag{1.4}$$

ce qui signifie que la fonction dont \mathcal{G} est le graphe vérifie bien les conditions de l'énoncé. On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{N} \times E, (0, \alpha) \in A \text{ et } ((n, x) \in A) \Rightarrow (s(n), f(x)) \in A\},$$

c'est-à-dire l'ensembles des sous-ensembles de $\mathbb{N} \times E$ vérifiant (1.3) et (1.4). On va montrer que l'ensemble

$$\mathcal{G} = \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$$

vérifie aussi les conditions (1.3) et (1.4), mais également la condition (1.2), ce qui conclura la preuve.

1. Tout d'abord, chacun des éléments A de \mathcal{E} contient $(0, \alpha)$. Donc, $(0, \alpha) \in \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$ et \mathcal{G} vérifie (1.3).
2. Ensuite, si (n, x) est dans \mathcal{G} , alors pour tout A de \mathcal{E} , (n, x) est dans A . Par définition de l'ensemble \mathcal{E} , on a donc $(s(n), f(x)) \in A$ pour tout A de \mathcal{E} . En conséquence, $(s(n), f(x)) \in \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$. Donc \mathcal{G} vérifie bien (1.4).
3. Pour montrer que \mathcal{G} vérifie (1.2), on prouve par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\exists! x \in E, (n, x) \in \mathcal{G}\text{”}.$$

L'ensemble \mathcal{G} contient nécessairement l'élément $(0, \alpha)$. Ensuite, pour un x de E avec $x \neq \alpha$, et pour un ensemble $A \in \mathcal{E}$, l'ensemble $A \setminus \{(0, x)\}$ est également élément de \mathcal{E} , de sorte que $(0, x) \notin \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

Supposons maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc un unique x tel que $(n, x) \in \mathcal{G}$. Par (1.4), on a $(s(n), f(x)) \in \mathcal{G}$. De plus, pour $y \in E$ avec $y \neq f(x)$, si $A \in \mathcal{E}$, alors $A \setminus \{(s(n), y)\}$ est également dans \mathcal{E} , puisque $(s(n), y)$ n'est pas de la forme $(s(n), f(z))$, où (n, z) est un élément de \mathcal{G} . Par conséquent, $(s(n), y) \notin \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$, ce qui montre $\mathcal{P}(s(n))$ et achève donc la démonstration de l'existence de φ . □

1.1.2 Addition et multiplication

On peut définir par récurrence une addition sur \mathbb{N} :

Définition 1.1.4. Soit m un élément de \mathbb{N} . On définit l'addition par les relations :

$$m + 0 = m \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m + n).$$

On peut également définir la multiplication de la manière suivante.

Définition 1.1.5. Soit m un élément de \mathbb{N} . On pose $m \times 0 = 0$ et pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$m \times s(n) = m \times n + m.$$

L'addition et la multiplication vérifient les propriétés classiques suivantes :

Propriété 1.1.6. L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives. L'addition et la multiplication admettent respectivement 0 et 1 comme élément neutre. La multiplication est distributive par rapport à l'addition. Pour tous entiers n , m et p , si $n + m = n + p$, alors $m = p$. De même, si $nm = np$ pour $n \neq 0$, alors $m = p$.

Démonstration. Toutes les preuves se font par des récurrences bien choisies. On ne rédigera que la preuve de la commutativité, les autres preuves étant laissées en exercice.

Considérons la proposition $\mathcal{P}(n)$ définie par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall m \in \mathbb{N}, n + m = m + n\text{”}.$$

On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout n .

- Nous allons faire une deuxième récurrence pour montrer $\mathcal{P}(0)$. Nous considérons la proposition $\mathcal{Q}(m)$ définie par :

$$\mathcal{Q}(m) : \text{“}0 + m = m + 0 = m\text{”}.$$

La proposition $\mathcal{Q}(0)$ est vraie par définition de l'addition. Supposons maintenant que $\mathcal{Q}(m)$ soit vraie pour un certain m . On a alors

$$0 + s(m) = s(0 + m) = s(m),$$

par définition de l'addition et l'hypothèse de récurrence. De plus, on a toujours, $s(m) + 0 = s(m)$. La propriété $\mathcal{Q}(s(m))$ est donc vraie, et on a montré par récurrence la propriété $\mathcal{P}(0)$.

- Passons maintenant à l'itération de la récurrence. Pour cela, on va démontrer le résultat suivant : **Lemme 1.1.7.** Pour tous entiers n et m , on a $s(m) + n = m + s(n)$.

Démonstration. Encore une récurrence. On considère la propriété

$$\mathcal{R}(n) : \text{“}\forall m \in \mathbb{N}, s(m) + n = m + s(n)\text{”}.$$

Soit m un entier, on a $s(m) + 0 = s(m) = s(m + 0) = m + s(0)$ (par la définition de $+$), donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie. Si on suppose $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un certain entier n , alors en utilisant successivement la définition de $+$, l'hypothèse de récurrence et encore la définition de $+$, on a

$$s(m) + s(n) = s(s(m) + n) = s(m + s(n)) = m + s(s(n)),$$

ce qui montre $\mathcal{R}(s(n))$. Finalement, $\mathcal{R}(n)$ est vrai pour tout n , et le lemme 1.1.7 est démontré. \square

Revenons à la preuve de $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(s(n))$. Soit n un entier naturel, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons un entier m . On a, en utilisant tour à tour le lemme 1.1.7, la définition de $+$, l'hypothèse de récurrence et la définition de $+$:

$$s(n) + m = n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) = m + s(n).$$

Cela montre $\mathcal{P}(s(n))$, et la preuve est achevée.

□

La propriété 1.1.3 prend une apparence plus habituelle en remplaçant $s(n)$ par $n + 1$ et en notant les fonctions de \mathbb{N} dans E sous forme de suites :

Propriété 1.1.8. *Soit E un ensemble, α un élément de E et f une fonction de E dans E . Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :*

$$u_0 = \alpha, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

De même, on peut construire des suites par des relations de récurrence double : si α et β sont deux éléments de E et f est une application de $E \times E$ dans E , alors il existe une unique suite d'éléments de E vérifiant

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n + 2 = f(u_n, u_{n+1}).$$

En effet, pour construire cette suite, il suffit d'appliquer la propriété 1.1.3 à la fonction F de $E \times E$ dans lui-même définie par $F(x, y) = (y, f(x, y))$ et à $(\alpha, \beta) \in E \times E$.

La définition 1.1.1 revient à supposer l'existence d'un ensemble \mathbb{N} possédant certaines propriétés. On peut montrer que si un autre ensemble possède les mêmes propriétés, il est isomorphe à \mathbb{N} en un certain sens. Cela signifie que l'ensemble \mathbb{N} est défini sans ambiguïtés par les axiomes de Peano.

Propriété 1.1.9. *Si deux triplets $(\mathbb{N}, 0, s)$ et $(\tilde{\mathbb{N}}, \tilde{0}, \tilde{s})$ vérifient les axiomes de Peano, alors il existe une unique bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$ telle que $f(0) = \tilde{0}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(s(n)) = \tilde{s}(f(n))$.*

Démonstration. La propriété 1.1.3 donne directement l'existence et l'unicité de f (avec $E = \tilde{\mathbb{N}}$, $\alpha = \tilde{0}$ et $f = \tilde{s}$). □

1.1.3 Bon ordre sur \mathbb{N}

Dans la partie 1.1.2, on a muni \mathbb{N} d'une multiplication et d'une addition. Une autre structure importante dont dispose \mathbb{N} est une structure d'ordre. On rappelle quelques définitions :

Définition 1.1.10. *Un ensemble (totalement) ordonné est un ensemble E muni d'une relation (c'est à dire d'une application de $E \times E$ dans $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$), notée \leq vérifiant les propriétés*

- pour tout x , on a $x \leq x$;
- pour tous x et y , si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$;
- pour tous x , y et z , si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$;
- pour tous x et y , on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$ (c'est la propriété d'ordre total).

Définition 1.1.11. *Soit E un ensemble totalement ordonné, et soit A un sous-ensemble de E .*

- un majorant (resp. un minorant) de A est un élément m de E tel que pour tout a de A , on ait $a \leq m$ (resp. $m \leq a$) ;
- Un plus grand élément (resp. un plus petit élément) est un majorant (resp. un minorant) de A qui appartient à A ;
- une borne supérieure (resp. une borne inférieure) de A est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).

Propriété 1.1.12. *Dans un ensemble ordonné E , si un sous-ensemble A de E admet un plus petit élément, celui-ci est unique. On le note alors $\min A$. Par ailleurs, la borne supérieure étant définie comme le plus petit élément d'un certain ensemble, celle-ci est également unique (si elle existe). On la note $\sup A$.*

Démonstration. Supposons qu'un ensemble A admette deux plus petits éléments x et y . Comme x est un plus petit élément de A et que $y \in A$, on a $x \leq y$. De même, $y \leq x$. On en conclut donc que $x = y$. \square

La propriété suivante montre que bien qu'il soit possible que la borne supérieure d'un ensemble A ne soit pas dans A , il existe des éléments de A qui s'en approchent autant que l'on souhaite.

Propriété 1.1.13. *Soit E un ensemble ordonné et A un ensemble admettant une borne supérieure. Pour tout x de E avec $x < \sup A$, il existe y dans A tel que $x < y \leq \sup A$.*

Démonstration. Soit x un élément de E vérifiant $x < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , x n'est pas un majorant de A . Il existe donc $y \in A$ tel que $x < y$. De plus, comme $\sup A$ est un majorant de A , on a $y \leq \sup A$. \square

On définit une relation d'ordre sur \mathbb{N} de la façon suivante :

Définition 1.1.14. *Étant donnés deux éléments n et m de \mathbb{N} , on dit que n est inférieur ou égal à m et on note $n \leq m$ si il existe un entier k tel que $n + k = m$.*

Propriété 1.1.15. *La relation \leq est une relation d'ordre totale sur \mathbb{N} .*

Démonstration. Les quatre propriétés définissant une relation d'ordre total sont montrées respectivement en utilisant :

- l'égalité $n + 0 = n$;
- la propriété 1.1.6;
- l'associativité de $+$;
- une récurrence sur m pour montrer que $\{m \in \mathbb{N}, n \leq m \text{ ou } m \leq n\} = \mathbb{N}$.

\square

La relation d'ordre a un bon comportement vis à vis de l'addition et de la multiplication :

Propriété 1.1.16. *Pour tous entiers naturels n , m et k , tels que $n \leq m$ on a*

$$n + k \leq m + k \quad \text{et} \quad nk \leq mk.$$

Démonstration. Par définition, si $n \leq m$, il existe q tel que $n + q = m$. On a donc $n + k + q = m + k$, donc $n + k \leq m + k$. De plus $mk = (n + q)k = nk + qk$, donc $nk \leq mk$. \square

Propriété 1.1.17. *Tout sous-ensemble non-vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément^(note 2).*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{N} , et supposons que A n'admette pas de plus petit élément. On va montrer que A est l'ensemble vide. Pour cela on va montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\{0, \dots, n\} \cap A = \emptyset\text{”},$$

est vraie pour tout n entier^(note 3). Tout d'abord, on remarque que $0 \notin A$, sinon il serait son plus petit élément, ce qui montre $\mathcal{P}(0)$. Soit n un entier, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Si $n + 1$ était élément

(note 2). On dit aussi que \mathbb{N} est bien ordonné.

(note 3). Bien entendu, $\{0, \dots, n\}$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$.

de A , par l'hypothèse de récurrence il serait son plus petit élément. Par conséquent, on a $n + 1 \notin A$, ce qui montre $\mathcal{P}(n + 1)$. On en déduit donc que

$$A = A \cap \mathbb{N} = A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap \{0, \dots, n\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

L'égalité $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, n\}$ découle du fait que pour tout entier n , on a $n \in \{0, \dots, n\}$ □

Propriété 1.1.18. \mathbb{N} n'admet pas de plus grand élément. En revanche, toute partie non-vidée majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Démonstration. – Supposons que \mathbb{N} admette un plus grand élément M . On aurait alors $M + 1 \leq M$, ce qui est contradictoire.

– On va montrer par récurrence la propriété suivante, qui conclura la preuve :

$\mathcal{P}(n) =$ “Tout sous-ensemble non-vidé de \mathbb{N} majoré par n admet un plus grand élément.”

Cette propriété est bien vraie au rang 0. En effet, le seul ensemble non-vidé majoré par 0 est $\{0\}$ qui admet 0 comme plus grand élément.

Considérons $n \in \mathbb{N}$, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit A un sous-ensemble non-vidé de \mathbb{N} majoré par $n + 1$. On a deux cas possibles : soit $n + 1 \in A$, auquel cas $n + 1$ est le plus grand élément de A ; soit $n + 1 \notin A$, auquel cas A est majoré par n et on applique $\mathcal{P}(n)$. Dans les deux cas $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. □

On a présenté ici une construction de \mathbb{N} basée sur le principe de récurrence. On aurait aussi pu *poser comme axiome* les propriétés 1.1.17 et 1.1.18, et *retourer* les axiomes de Peano (qui seraient cette fois-ci des théorèmes) à partir de ces deux axiomes. En effet, si on part des propriétés 1.1.17 et 1.1.18, on peut définir 0 comme étant le plus petit élément de \mathbb{N} , et on définit $s(n)$ par

$$s(n) = \min\{k \in \mathbb{N}, k > n\}.$$

Cette expression a bien un sens : en effet, comme \mathbb{N} n'a pas de plus grand élément, le membre de droite est non-vidé, et admet donc un plus petit élément. On peut alors vérifier que s est une bijection de \mathbb{N} dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (il suffit de montrer que sa réciproque est $s^{-1}(n) = \max\{k \in \mathbb{N}, k < n\}$), et que $(\mathbb{N}, 0, s)$ vérifie l'axiome de récurrence (pour un ensemble A contenant 0 et stable par s , considérer le plus petit élément de $\mathbb{N} \setminus A$; on arrive à une contradiction, ce qui montre que $A = \mathbb{N}$).

1.1.4 Quelques autres types de récurrence

En plus du raisonnement par récurrence simple présenté dans la partie 1.1.1, il existe d'autres types de récurrence.

La récurrence double (triple, etc)

Pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n , on peut également montrer les propositions suivantes :

– $\mathcal{P}(0)$;

- $\mathcal{P}(1)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$.

En effet, une récurrence simple permet alors de montrer la proposition

$$\mathcal{Q}(n) = \text{“}\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)\text{”}$$

pour tout entier n .

On peut également parler de récurrence triple, quadruple, etc. À ce moment-là il faut initialiser la récurrence par $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ et montrer “ $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \text{ et } \mathcal{P}(n+2)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+3)$ ” (pour une récurrence triple).

La récurrence forte

Pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n , on peut également montrer les deux propositions suivantes :

- $\mathcal{P}(0)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

En effet, par une récurrence simple, les hypothèses précédentes permettent alors de montrer la proposition

$$\mathcal{R}(n) = \text{“}\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(k)\text{”}$$

pour tout entier n .

1.2 L’anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs

On ne peut pas définir une soustraction pour tout couple d’éléments de \mathbb{N} , mais on a tout de même la propriété suivante :

Propriété 1.2.1. *Si $n \leq m$ il existe un unique entier k tel que $n + k = m$. On le note $k = m - n$.*

Démonstration. L’existence vient de la définition de la relation d’ordre. Pour l’unicité on suppose $n+k = m = n+q$. La propriété 1.1.6 permet de conclure $k = q$. \square

On va alors construire l’ensemble des entiers relatifs en rajoutant “à la main” les éléments $n - m$ pour $n < m$.

Définition 1.2.2. *On pose^(note 4) $\mathbb{Z} = \{0\} \cup (\{+, -\} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$. Les éléments de la forme $(+, n)$ et $(-, n)$ seront respectivement notés n et $-n$.*

On définit alors l’addition et la multiplication sur \mathbb{Z} à partir de l’addition et la multiplication sur \mathbb{N} en utilisant les règles habituelles pour les signes.

Propriété 1.2.3. *Muni de $+$ et \times , \mathbb{Z} est un anneau commutatif.*

Démonstration. Laissez en exercice. \square

La structure d’anneau est la structure naturelle pour effectuer des additions, soustractions, multiplications. Ceci est formalisé dans la définition suivante :

(note 4). La notation \mathbb{Z} vient du mot allemand “Zahl”, qui signifie “nombre”.

Définition 1.2.4. Un anneau A est un ensemble muni de deux lois de composition internes (c'est-à-dire deux fonctions de $A \times A$ dans A), notées $+$ et \times , vérifiant les propriétés "naturelles" suivantes.

- l'addition est commutative, associative, possède un élément neutre 0_A et tout élément admet un opposé ;
- la multiplication est commutative, associative et possède un élément neutre 1_A ;
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Un autre définition de \mathbb{Z} , plus artificielle, mais facilitant les preuves des propriétés classiques de l'addition et de la multiplication se fait en utilisant un quotient de \mathbb{N} .

Définition 1.2.5. On définit une relation d'équivalence \sim sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(n, m) \sim (n', m')$ si $n + m' = n' + m$. On appelle \mathbb{Z} l'ensemble des classes d'équivalences de \sim .

On définit la somme de deux éléments de \mathbb{Z} par $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m')$. De même on définit la multiplication par la formule

$$(n, m) \times (n', m') = (nn' + mm', nm' + mn').$$

Cette définition se comprend si l'on voit \mathbb{Z} comme l'ensemble des différences entre deux éléments de \mathbb{N} : la classe d'équivalence de (n, m) est à comprendre comme $n - m$.

1.3 Le corps \mathbb{Q} des rationnels

Un corps est un cas particulier d'anneau, dans lequel on peut effectuer des divisions. Plus précisément :

Définition 1.3.1. Un corps est un anneau dans lequel tout élément est inversible (pour la multiplication).

Définition 1.3.2. On définit une relation d'équivalence \sim sur $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ par $(n, m) \sim (n', m')$ si $nm' = n'm$. On appelle^(note 5) \mathbb{Q} l'ensemble des classes d'équivalence de \sim . La classe de (n, m) est notée $\frac{n}{m}$. Les éléments de \mathbb{Q} sont appelés nombres rationnels.

Définition 1.3.3. On définit une addition et une multiplication sur \mathbb{Q} par les formules

$$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} = \frac{nm' + n'm}{mm'} \quad \text{et} \quad \frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'} = \frac{nn'}{mm'}.$$

On définit aussi une relation d'ordre sur \mathbb{Q} par

$$\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'} \Leftrightarrow nm' \leq n'm \quad \text{si } m > 0 \text{ et } m' > 0.$$

La condition $m > 0$ dans la définition de l'ordre n'est pas restrictive puisque tout rationnel à une représentation dont le dénominateur est positif (puisque $\frac{n}{m} = \frac{-n}{-m}$).

L'ensemble \mathbb{Q} est donc muni de deux structures : d'une part d'une structure d'anneau, avec les lois $+$ et \times , d'autre part, d'une structure d'ordre. Dans le cas de \mathbb{Q} ces deux structures sont compatibles au sens suivant.

Définition 1.3.4. Un corps \mathbb{K} est dit ordonné si il est muni d'une relation d'ordre \leq compatible avec la structure de corps, au sens où :

(note 5). La notation \mathbb{Q} vient du mot "quotient".

- si x, y et z sont trois éléments de \mathbb{K} avec $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;
- si x, y et z sont trois éléments de \mathbb{K} avec $0 < z$ et $x < y$ alors, $zx < zy$.

Propriété 1.3.5. Muni de $+$, \times et \leq , \mathbb{Q} est un corps ordonné.

Démonstration. Laissé en exercice. □

Propriété 1.3.6. Tout corps ordonné contient un unique sous-corps isomorphe à \mathbb{Q} . L'isomorphisme en question est unique.

Avant de prouver la propriété 1.3.6, on va montrer un lemme.

Lemme 1.3.7. Dans un corps ordonné \mathbb{K} , on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0_{\mathbb{K}} < n1_{\mathbb{K}}$.

Démonstration. On procède par récurrence. Tout d'abord, on montre par l'absurde que $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. En effet, si $1_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, la multiplication par $1_{\mathbb{K}}$ changerait le signe de l'égalité, et on aurait $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, ce qui est contradictoire. On a donc montré la propriété au rang 0. Supposons vraie l'inégalité au rang n : $0_{\mathbb{K}} < n1_{\mathbb{K}}$. Alors, en ajoutant $1_{\mathbb{K}}$ on obtient $1_{\mathbb{K}} < (n+1)1_{\mathbb{K}}$, or $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$, d'où $0_{\mathbb{K}} < (n+1)1_{\mathbb{K}}$. □

Démonstration de la propriété 1.3.6. Le lemme 1.3.7 montre que dans un corps ordonné, le seul entier relatif nul est 0. On peut donc diviser par tout entier $n \neq 0$. L'ensemble $\left\{ \frac{n1_{\mathbb{K}}}{m1_{\mathbb{K}}}, (n, m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \right\}$ est donc un sous-corps de \mathbb{K} isomorphe à \mathbb{Q} . L'unicité du morphisme vient du fait que l'image du rationnel $\frac{n}{m}$ ne peut être que $\frac{n1_{\mathbb{K}}}{m1_{\mathbb{K}}}$. □

On fini ce paragraphe par remarquer qu'il y a "autant" de rationnels que d'entiers.

Propriété 1.3.8. \mathbb{Q} est dénombrable, c'est à dire qu'il existe une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{Q} .

Démonstration. On va faire cette preuve en admettant le résultat intuitif suivant, mais dont la preuve n'est pas si facile, appelé *théorème de Cantor-Bernstein* :

Théorème 1.3.9. Étant donnés deux ensembles E et F , si il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E dans F .

Il nous suffit donc d'exhiber une injection de \mathbb{Q} dans \mathbb{N} . On définit par exemple l'injection de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} définie par $\frac{n}{m} \mapsto 2^m(2n+1)$, où la fraction $\frac{n}{m}$ aura été choisie telle que m soit positif et le plus petit possible. Ensuite, on exhibe une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} par exemple, l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$f : \begin{cases} 2n+1 & \mapsto n \\ 2n & \mapsto -n \end{cases}$$

convient. □

1.4 Le corps \mathbb{R} des réels

1.4.1 Définition axiomatique de \mathbb{R}

Nous commençons par une définition axiomatique de \mathbb{R} .

Définition 1.4.1. Un corps ordonné \mathbb{K} est dit Archimédien si quels que soient deux éléments x et y de \mathbb{K} avec $0 < x$ et $0 < y$, il existe un entier positif n tel que $x < ny$.

Un corps ordonné \mathbb{K} vérifie la propriété de la borne supérieure si tout sous-ensemble non-vide majoré admet une borne supérieure. On dit aussi que \mathbb{K} est complet.

Théorème 1.4.2. Il existe un unique corps ordonné Archimédien vérifiant la propriété de la borne supérieure, à unique isomorphisme près. On le note \mathbb{R} . Les éléments de \mathbb{R} sont appelés “nombres réels”.

Dans le théorème 1.4.2 on entend par “isomorphisme” un isomorphisme de corps croissant.

La propriété importante pour nous ici est la propriété de la borne supérieure. On remarquera que \mathbb{Q} est un corps ordonné Archimédien, qui ne vérifie pas cette propriété^(note 6).

Nous allons montrer le théorème 1.4.2 dans les deux parties suivantes : nous allons montrer qu’il existe un corps ordonné Archimédien et complet dans la partie 1.4.2, puis que deux tels corps sont isomorphes dans la partie 1.4.3.

1.4.2 Une construction de \mathbb{R}

L’idée de cette construction est que l’ensemble $\{q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$ caractérise entièrement le réel α . Comme pour l’instant on n’a défini que l’ensemble \mathbb{Q} , on va chercher à caractériser les ensembles de cette forme sans faire mention des réels. C’est ce qui est fait dans la définition suivante.

Définition 1.4.3. On dit qu’un ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ est une coupure^(note 7) de \mathbb{Q} si :

- il est différent de \mathbb{Q} et \emptyset ;
- pour tout élément q de A , on a $\{r \in \mathbb{Q}, r \leq q\} \subset A$;
- pour tout q de A , il existe $r > q$ avec $r \in A$.

L’existence d’un élément $r > q$ dans A permet d’éviter que les deux ensembles $\{q \in \mathbb{Q}, q \leq q_0\}$ et $A_{q_0} = \{q \in \mathbb{Q}, q < q_0\}$ ne soient tous les deux des coupures.

Définition 1.4.4. On note \mathcal{R} l’ensemble des coupures de \mathbb{Q} .

On notera que \mathbb{Q} peut être vu comme un sous-ensemble de \mathcal{R} par l’identification $q \simeq \{r \in \mathbb{Q}, r < q\}$. Toutefois, certaines coupures ne s’identifient à aucun rationnel, comme par exemple $\{q \in \mathbb{Q}, q \leq 0$ ou $q^2 \leq 2\}$, qui correspondra au réel $\sqrt{2}$.

Quand on aura défini les réels, on verra que les coupures sont exactement les ensembles de la forme $\{q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On va définir sur \mathcal{R} une structure de corps ordonné, puis nous montrerons que ce corps est Archimédien et complet.

Définition 1.4.5. – L’ensemble \mathcal{R} est muni de la relation d’ordre \subset .

- \mathcal{R} est muni de la loi de composition interne + définie par

$$A + B = \{q \in \mathbb{Q}, \exists a \in A, \exists b \in B, q = a + b\} = \bigcup_{b \in B} A + b.$$

(note 6). Par contre, un corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure est nécessairement Archimédien. En effet, dans un corps ordonné non-Archimédien l’ensemble \mathbb{N} est majoré (il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $n\alpha < \beta$ pour tout n , donc $n \leq \frac{\beta}{\alpha}$). Si ω est un majorant de \mathbb{N} , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n + 1 \leq \omega$, d’où $n \leq \omega - 1$. Par conséquent, $\omega - 1$ est un majorant de \mathbb{N} , et \mathbb{N} n’a donc pas de plus petit majorant, c’est-à-dire pas de borne supérieure.

(note 7). On dit aussi coupure de Dedekind.

Propriété 1.4.6. *L'ensemble \mathcal{R} muni de $+$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est $\mathcal{O} = \{q \in \mathbb{Q}, q < 0\}$ et l'opposé d'un élément A de \mathcal{R} est donné par*

$$-A = \{q \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{Q} \setminus A, q < -r\}$$

Démonstration. La loi $+$ est clairement commutative et associative. On montre que \mathcal{O} est son élément neutre.

– Soit A une coupure. On a

$$A + \mathcal{O} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q < 0} A + q.$$

Or, pour $q < 0$ rationnel, on a $A + q \subset A$, donc $A + \mathcal{O} \subset A$. De plus, si $q \in A$, il existe $r \in A$ avec $q < r$. On a alors

$$q = r + (q - r) \in A + (q - r) \subset A + \mathcal{O},$$

d'où $A \subset A + \mathcal{O}$.

– Soit $q \in -A$. Il existe $r \notin A$ avec $q < -r$. Par conséquent, $A + q \subset A - r$. Or, $r \notin A$, de sorte que $A - r \subset \mathcal{O}$, ce qui montre que $A + (-A) \subset \mathcal{O}$. De même, soit $q < 0$. On va montrer que $q \in A + (-A)$. Soit $r \in A$ tel que $r - \frac{q}{2} \notin A$. Un tel rationnel existe : si ce n'était pas le cas, pour tout $r < q$, l'ensemble $\{r - n\frac{q}{2}, n \in \mathbb{N}\}$ serait inclus dans A , et on aurait $A = \mathbb{Q}$. Le rationnel $-(r - q)$ est alors dans $-A$ (puisque $r - q < r - \frac{q}{2} \notin A$), ce qui montre que $q = r + (q - r)$ est dans $A + (-A)$. On a donc $\mathcal{O} \subset A + (-A)$. □

On peut également définir une multiplication sur \mathcal{R} :

Définition 1.4.7. *Si A et B sont positifs, on pose :*

$$A \times B = \{q \in \mathbb{Q}, \exists \alpha \in A, \exists \beta \in B, a > 0, b > 0, q < ab\}.$$

Pour A et B quelconques, on définit $A \times B$ grâce à la règle des signes.

Propriété 1.4.8. *Muni de $+$, \times et \leq , \mathcal{R} est un corps ordonné dont l'élément neutre est $\mathcal{O} = \{q \in \mathbb{Q}, q < 0\}$ et l'élément unité $\mathcal{I} = \{q \in \mathbb{Q}, q < 1\}$.*

Démonstration. Laissez en exercice. □

Propriété 1.4.9. *\mathcal{R} est Archimédien.*

Démonstration. Soient A et B deux coupures avec $A > \mathcal{O}$ et $B > \mathcal{O}$. Soit $\alpha > 0$ un rationnel tel que $\alpha \in A$ (qui existe car $A > \mathcal{O}$, ce qui signifie que l'inclusion $\{q \in \mathbb{Q}, q < 0\} \subset A$ est stricte) et β un rationnel tel que $\beta \notin B$ (qui existe car une coupure ne peut pas être égale à \mathbb{Q}), et qui vérifie donc $\beta > 0$. Comme \mathbb{Q} est Archimédien, on peut trouver n tel que $n\alpha > \beta$. Soit q un élément de B . Comme $\beta \notin B$, on a $q < \beta < n\alpha$. Par conséquent, $\frac{q}{n} < \alpha$, et donc $\frac{q}{n} \in A$. On a donc $B \subset \{q \in \mathbb{Q}, \frac{q}{n} \in A\} = nA$. □

Propriété 1.4.10. *\mathcal{R} vérifie la propriété de la borne supérieure.*

Démonstration. Soit \mathcal{X} un sous-ensemble non-vide majoré de \mathcal{R} . On va montrer qu'il admet une borne supérieure. On note $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$ (ne pas oublier que les éléments de \mathcal{R} ont été définis comme des sous-ensembles de \mathbb{Q}). Montrons que S est une coupure de \mathbb{Q} . Comme \mathcal{X} est non-vide il contient un élément B (et B , qui est une coupure, est non-vide), et $B \subset \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A = S$, par conséquent S est non-vide. De plus \mathcal{X} est majoré, donc il existe un élément M (qui, en tant que coupure, est différent de \mathbb{Q}) tel que tout élément B de \mathcal{X} vérifie $B \subset M$. Par conséquent, B est différent de \mathbb{Q} . Soit x est un élément de S . Comme $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$ il existe un A de \mathcal{X} tel que $x \in A$. Comme A est une coupure, $\{y \in \mathbb{Q}, y \leq x\} \subset A \subset S$ et il existe $z \in A \subset S$ avec $x < z$. L'ensemble S est donc bien une coupure.

Montrons maintenant que S est bien une borne supérieure de \mathcal{X} . Il faut pour cela montrer que S est un majorant de \mathcal{X} , puis que tout majorant de \mathcal{X} est supérieur à S .

Soit B un élément de \mathcal{X} . On a $B \subset \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A = S$, donc $B \subset S$. S est donc bien un majorant de \mathcal{X} .

Soit maintenant M un majorant de \mathcal{X} . On a donc, pour tout B de \mathcal{X} , l'inclusion $B \subset M$. Par conséquent $S = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A \subset M$. S est donc le plus petit des majorants de \mathcal{X} . \square

1.4.3 Unicité du corps des réels

On va considérer deux corps vérifiant les conditions du théorème 1.4.2 et montrer qu'il existe un unique isomorphisme entre ces deux corps.

On savait déjà par la propriété 1.3.6 qu'un corps ordonné contenait un unique sous-corps isomorphe à \mathbb{Q} (également noté \mathbb{Q} , par abus de notation). On montre maintenant que le fait que \mathbb{K} soit Archimédien revient à dire que ce sous-corps est dense dans \mathbb{K} .

Propriété 1.4.11. *Dans un corps ordonné \mathbb{K} Archimédien, on peut encadrer tout élément x par des éléments de \mathbb{Q} arbitrairement proches, au sens où pour tout entier m strictement positif, il existe un encadrement $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$, avec n entier relatif.*

De plus, si $x < y$ sont deux éléments de K on peut trouver un rationnel q tel que $x < q < y$.

Démonstration. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer que $0 < x$. Soit m un entier naturel. Comme \mathbb{K} est Archimédien, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, x < \frac{k}{m}\}$ est non-vide. On note n son plus petit élément. On a donc $x < \frac{n}{m}$ et $\frac{n-1}{m} \leq x$.

Ensuite, si $x < y$, comme K est Archimédien, on peut trouver m tel que $m > \frac{1}{y-x}$, de sorte que $\frac{1}{m} < y-x$. Il existe alors, par la première partie de la proposition, un entier n tel que $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$. On a alors, $\frac{n}{m} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} < x + (y-x) = y$. Le rationnel $\frac{n}{m}$ vérifie bien $x < \frac{n}{m} < y$. \square

Nous allons maintenant faire la démonstration de l'unicité de \mathbb{R} . Soient \mathbb{R} et \mathbb{R}' deux corps satisfaisant les conditions du théorème 1.4.2. Nous allons construire un isomorphisme entre \mathbb{R} et \mathbb{R}' . Par la propriété 1.3.6, les deux corps \mathbb{R} et \mathbb{R}' contiennent respectivement deux corps \mathbb{Q} et \mathbb{Q}' isomorphes au corps des nombres rationnels. On notera $q \mapsto q'$ l'isomorphisme entre \mathbb{Q} et \mathbb{Q}' . Soit x un élément de \mathbb{R} . On considère le sous-ensemble A_x de \mathbb{Q} défini par

$$A_x = \{q \in \mathbb{Q}, q < x\}.$$

Lemme 1.4.12. *A_x est majoré et $\sup A_x = x$. De plus, A_x admet également un majorant dans \mathbb{Q} .*

Démonstration. Tout d'abord, A est majoré par x , et la propriété 1.4.11 donne l'existence d'un majorant rationnel de x . Il admet donc une borne supérieure dans \mathbb{R} , notée s . La définition de A montre que $s \leq x$, car x est un majorant de A . Mais si $s < x$, la propriété 1.4.11 donne un rationnel q tel que $s < q < x$.

Le rationnel q est alors un élément de A strictement supérieur à $s = \sup A$, ce qui est une contradiction. Par conséquent $x = s$. \square

On note

$$A'_x = \{q' \in \mathbb{Q}', q \in A_x\}.$$

L'ensemble A'_x est un sous-ensemble de \mathbb{R}' majoré par q'_0 , où q_0 est un majorant rationnel de A_x , et admet donc une borne supérieure dans \mathbb{R}' . On définit donc une application φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}' par

$$\varphi : x \mapsto \sup A'_x.$$

On va montrer que φ est un isomorphisme de corps croissant, ce qui achèvera la démonstration.

Tout d'abord, on remarque que si $x \leq y$, on a $A_x \subset A_y$, de sorte que $A'_x \subset A'_y$, ce qui montre que φ est croissant. Ensuite, on remarque que si x et y sont deux éléments de \mathbb{K} , on a $A_x + A_y = A_{x+y}$, ce qui fait que

$$\sup A'_x + \sup A'_y = \sup A'_{x+y}.$$

Des arguments similaires (en séparant les cas suivant le signe de x et y) montrent que

$$\sup A'_x \times \sup A'_y = \sup A'_{xy}.$$

On a donc bien affaire à un morphisme de corps. On peut de même construire un morphisme de corps de \mathbb{R}' vers \mathbb{R} , et l'on montre que ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre, ce qui montre que l'on a affaire à des isomorphismes.

1.4.4 Quelques propriétés en vrac

Approximation décimale

La propriété 1.4.11 montre que pour tout réel x et tout entier naturel n on peut trouver un encadrement de la forme

$$\frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k+1}{10^n}.$$

Les nombres $\frac{k}{10^n}$ et $\frac{k+1}{10^n}$ sont respectivement appelés des approximations décimales de x par défaut et par excès. L'intérêt est qu'un rationnel de la forme $\frac{k}{10^n}$ peut être exprimé sous forme d'un développement décimal *fini*.

On verra plus loin (dans le chapitre sur les séries), comment tout réel s'exprime à l'aide d'un développement décimal, éventuellement infini.

Partie entière

La propriété 1.4.11 montre que pour tout réel x , il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. On appelle n la partie entière de x et on le note $E(x)$.

Approximation rationnelle quadratique

On va ici préciser la propriété 1.4.11. En effet, étant donné un réel x et un entier m , il existe un encadrement

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m}.$$

Une majoration de l'erreur dans cette approximation est alors donnée par $|x - \frac{n}{m}| \leq \frac{1}{m}$. On va montrer que si m est bien choisi, on peut avoir une approximation bien plus précise.

Propriété 1.4.13. *Soit x un nombre réel et soit N un entier naturel. Il existe n et m deux entiers avec $n \leq N$ et $m \leq N$ tels que*

$$\left| \frac{n}{m} - x \right| \leq \frac{1}{mN}.$$

Démonstration. Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, il existe un entier n_m tel que

$$n_m \leq mx < n_m + 1.$$

On considère alors l'ensemble

$$A = \{mx - n_m, m \in \{0, \dots, N\}\} \subset [0, 1[.$$

L'ensemble A a $N + 1$ éléments, donc si on écrit $[0, 1]$ comme une union de N intervalles :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^N \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right[,$$

il existe un entier k tel que $[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}[\cap A$ ait deux éléments ^(note 8) $px - n_p$ et $qx - n_q$, avec $p \neq q$. On a donc

$$|(q-p)x - (n_q - n_p)| \leq \frac{1}{N}.$$

On en déduit que

$$\left| x - \frac{n_q - n_p}{q-p} \right| \leq \frac{1}{(q-p)N}.$$

Il suffit de poser $n = n_q - n_p$ et $m = q - p$ pour conclure. \square

Valeur absolue

Définition 1.4.14. *Étant donné un réel x , on pose $|x| = \max(-x, x)$. De manière équivalente, si $x \geq 0$ on a $|x| = x$ et si $x < 0$ on a $|x| = -x$.*

Propriété 1.4.15. *Si x et y sont deux réels, on a les inégalités*

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

(note 8). On met $N + 1$ objets dans N ensemble. Par conséquent, les $N + 1$ objets ne peuvent pas tous se retrouver dans des ensembles distincts. Ce principe s'appelle le *principe des tiroirs*.

Démonstration. On a $x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, de sorte que, par addition, $x - y \leq |x| + |y|$. De même, on a $y - x \leq |x| + |y|$. Comme $|x - y| = \max(x - y, y - x)$, on a prouvé l'inégalité de droite.

Pour la première inégalité, on écrit

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|,$$

ce qui donne $|x| - |y| \leq |x - y|$. De même, on a $|y| - |x| \leq |x - y|$. On a alors $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. \square

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Un peu de vocabulaire

Définition 2.1.1. Une suite réelle est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

On utilisera la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour désigner les suites de réels, où u_n est l'image de n par la suite. L'ensemble des suites réelles (parfois noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} en définissant, pour deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel λ

$$\lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Définition 2.1.2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si elle vérifie la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

Si l'inégalité est stricte, on dit que la suite est strictement croissante. De même on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n,$$

et qu'elle est strictement décroissante si l'inégalité est stricte. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Définition 2.1.3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée si elle vérifie

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

De même, on définit une suite minorée. Une suite majorée et minorée est dite bornée.

2.2 Convergence des suites

On dit qu'une suite de réels converge vers un réel l si elle satisfait la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Autrement dit, si on se fixe *a priori* un seuil d'erreur (à savoir ε), il suffira d'aller assez loin dans la suite (au-delà de N) pour que tous les termes de la suite valent l , avec une erreur inférieure au seuil.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Propriété 2.2.1. *Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l , alors ce réel est unique, et on le note $l = \lim_n u_n$. On utilisera également la notation $u_n \rightarrow_n l$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, et soient deux réels l et l' , avec $l < l'$. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l , et montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l' . On pose $\varepsilon = \frac{l' - l}{2}$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, on a $|u_n - l| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors que pour $n \geq N$,

$$2\varepsilon = l' - l \leq |u_n - l'| + |u_n - l| < \varepsilon + |u_n - l'|.$$

Autrement dit, $|u_n - l'| > \varepsilon$ pour n assez grand, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers l' . \square

En revanche, certaines suites ne convergent vers aucun réel. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. On prendra donc garde à ne pas utiliser la quantité $\lim_n u_n$ avant d'avoir montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notamment, on se souviendra que la notation $u_n \rightarrow_n l$ signifie : "la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_n u_n = l$ ".

Propriété 2.2.2. *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Il suffit de récrire la définition. \square

Propriété 2.2.3. *Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors leur somme converge et vérifie*

$$\lim_n (u_n + v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n.$$

De même si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si λ est un réel, alors $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut :

$$\lim_n \lambda u_n = \lambda \lim_n u_n.$$

Autrement dit, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_n u_n$ est linéaire.

Démonstration. – Pour la suite $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \lim_n u_n| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$. On a alors pour $n \geq N$,

$$\left| \lambda u_n - \lambda \lim_n u_n \right| \leq \varepsilon.$$

– Pour la somme de deux suites :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait ^(note 1)

$$\left| u_n - \lim_n u_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| v_n - \lim_n v_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(note 1). La convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne un entier N_1 à partir duquel $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. De même, on a un entier N_2 à partir duquel $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. On prend alors $N = \max(N_1, N_2)$.

On a alors pour $n \geq N$

$$\left| (u_n + v_n) - \left(\lim_n u_n + \lim_n v_n \right) \right| \leq \left| u_n - \lim_n u_n \right| + \left| v_n - \lim_n v_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Propriété 2.2.4. Une suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite l . Par définition de la convergence d'une suite (avec $\varepsilon = 1$), il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors

$$|u_n - l| \leq 1, \quad \text{ou encore} \quad l - 1 \leq u_n \leq l + 1.$$

On a donc, pour tout n , l'encadrement

$$\min(u_0, \dots, u_N, l - 1) \leq u_n \leq \max(u_0, \dots, u_N, l + 1).$$

□

La réciproque est bien entendu fausse, la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée sans être convergente (pour montrer que cette suite n'est pas convergente, on peut par remarquer qu'elle n'est pas de Cauchy, puisque $|u_n - u_{n+1}| = 2$, voir propriété 2.3.6).

La propriété 2.2.4 nous permet de montrer que la convergence est aussi stable par produit :

Propriété 2.2.5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et vérifie

$$\lim_n u_n v_n = \left(\lim_n u_n \right) \left(\lim_n v_n \right).$$

De plus, si $\lim_n v_n \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $v_n \neq 0$, de sorte que l'on peut parler de la convergence de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite converge et on a

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}.$$

Démonstration. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes donc bornées. Soit donc M tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ quel que soit n . Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait ^(note 2)

$$\left| u_n - \lim_n u_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \left| v_n - \lim_n v_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

On a alors, pour $n \geq M$

$$\begin{aligned} \left| u_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n \right| &\leq \left| u_n v_n - u_n \lim_n v_n \right| + \left| u_n \lim_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n \right| \\ &= |u_n| \left| v_n - \lim_n v_n \right| + \left| u_n - \lim_n u_n \right| \left| \lim_n v_n \right| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

(note 2). Voir note (note 1).

On a bien la convergence de $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le produit des limites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour la deuxième partie de la propriété, en prenant $\varepsilon = \frac{|\lim_n v_n|}{2} > 0$ dans la définition de la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on trouve un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|v_n - \lim_n v_n| \leq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$, ce qui implique

$$|v_n| \geq \left| \lim_n v_n \right| - |v_n - \lim_n v_n| \geq \left| \lim_n v_n \right| - \frac{|\lim_n v_n|}{2} = \frac{|\lim_n v_n|}{2}.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend donc bien des valeurs non-nulles pour $n \geq N$. Il suffit maintenant de montrer que $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\lim_n v_n}$. Remarquons que

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n} = \frac{\lim_n v_n - v_n}{v_n \lim_n v_n}.$$

On a vu précédemment qu'il existe un entier N pour lequel, si $n \geq N$, on a $|v_n| \geq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$. On a donc, pour $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n} \right| = \frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|v_n \lim_n v_n|} \leq 2 \frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|\lim_n v_n|^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Il existe un entier \tilde{N} tel que si $n \geq \tilde{N}$, on a $|v_n - \lim_n v_n| \leq \frac{|\lim_n v_n|^2 \varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geq \max(N, \tilde{N})$, on a

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n} \right| \leq 2 \frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|\lim_n v_n|^2} \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 2.2.6. On dit qu'une suite réelle diverge vers ∞ si elle vérifie la proposition

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

On notera alors $\lim_n u_n = \infty$ ou $u_n \rightarrow_n \infty$. De même, on dit qu'une suite réelle diverge vers $-\infty$ si elle vérifie la proposition

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq M.$$

On utilisera alors la notation $\lim_n u_n = -\infty$ ou $u_n \rightarrow_n -\infty$.

En réalité, une suite divergente vers $\pm\infty$ est pour plusieurs raisons plus proche d'une suite convergente que d'une suite divergente quelconque. Notamment, les propriétés 2.2.3 et 2.2.5 restent vraies pour des suites qui divergent vers $\pm\infty$, si l'on suit les règles d'addition et de multiplication pour les infinis (avec $x \in \mathbb{R}$) :

$$\infty + x = \infty ; \quad \infty + \infty = \infty ; \quad \infty \times \infty = \infty ; \quad x \times \infty = \text{signe}(x)\infty ; \quad \frac{x}{\infty} = 0.$$

De plus, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{x}{0^+} = \text{signe}(x)\infty,$$

où la notation 0^+ désigne la limite d'une suite convergeant vers 0 par valeurs positives. On fera en revanche attention aux formes indéterminées

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Par conséquent, on s'autorisera également à dire qu'une suite "converge vers $\pm\infty$ ". Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (vers un réel) ou diverge vers $\pm\infty$, on dira que la $\lim_n u_n$ existe dans $[-\infty, \infty]$. Pour éviter les confusions, on précisera à chaque fois si la suite converge vers un réel fini ou converge dans $[-\infty, \infty]$.

On a une propriété de préservation de l'ordre par passage à la limite.

Propriété 2.2.7. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $\lim_n u_n$ et $\lim_n v_n$ existent dans $[-\infty, \infty]$. Si pour tout entier n on a l'inégalité $u_n \leq v_n$, alors les limites vérifient

$$\lim_n u_n \leq \lim_n v_n.$$

Démonstration. On ne traite que le cas où les limites sont finies, le cas où au moins une des limite est infinie se traitant de manière similaire. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que

$$\lim_n u_n > \lim_n v_n.$$

On va exhiber un entier N tel que $u_N > v_N$, ce qui achèvera la preuve. Soit $\varepsilon = \frac{\lim_n u_n - \lim_n v_n}{2}$. Il existe un entier N tel que la proposition suivante soit vérifiée :

$$\forall m \geq N, \quad |u_m - \lim_n u_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |v_m - \lim_n v_n| < \varepsilon.$$

On en déduit alors, par l'inégalité triangulaire,

$$v_N < \lim_n v_n + \varepsilon = \frac{\lim_n u_n + \lim_n v_n}{2} = \lim_n u_n - \varepsilon < u_N,$$

ce qui montre que $v_{n_0} < u_{n_0}$. □

Il est important de remarquer que l'inégalité $u_n < v_n$ ne donne pas une inégalité stricte à la limite : par exemple, on a $0 < \frac{1}{n}$, mais $\lim_n 0 = 0 = \lim_n \frac{1}{n}$.

Propriété 2.2.8 (Théorème des gendarmes). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie l . On suppose que pour tout n , on ait l'inégalité

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $\lim_n v_n$ existe et vaut l .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un entier N tel si $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et $|w_n - l| \leq \varepsilon$. Or, on a $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$, ce qui implique que $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|)$. Par conséquent, si $n \geq N$, on a $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|) \leq \varepsilon$. □

Propriété 2.2.9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant pour tout n l'inégalité $u_n \leq v_n$ et supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers ∞ . Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers ∞ .

De même si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers ∞ , l'autre cas étant totalement similaire. Soit M un réel. Par définition, il existe N tel que si $n \geq N$, on a $M \leq u_n \leq v_n$, ce qui achève la preuve. □

2.3 Quelques critères de convergence

2.3.1 Suites monotones

Propriété 2.3.1. *Une suite croissante et majorée est convergente (vers une limite finie). De même, une suite décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On va montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sup_n u_n$ (qui est bien défini et appartient à \mathbb{R} , la suite étant majorée).

Soit ε un réel positif. Par définition de la borne supérieure, il existe un entier N tel que $u_N \geq \sup_n u_n - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a donc, pour tout $n \geq N$, l'inégalité

$$\sup_n u_n - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \sup_n u_n.$$

Par conséquent, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n - \sup_n u_n| \leq \varepsilon$. Ce qui achève la preuve. \square

La propriété 2.3.1 dit en substance qu'une suite croissante ne peut avoir que deux comportements : ou bien elle est bornée, auquel cas elle converge vers un réel fini, ou bien elle n'est pas bornée, auquel cas elle tend vers ∞ .

La propriété 2.3.1 peut sembler évidente à première vue, mais elle repose en fait fortement sur la *complétude* de \mathbb{R} . Notamment, pour exhiber une limite à la suite, on a dû utiliser la propriété de la borne supérieure. La propriété 2.3.1 n'est notamment pas vraie dans \mathbb{Q} . Par exemple, la suite

$$3 ; 3.1 ; 3.14 ; 3.141 ; 3.1415 ; 3.14159 ; 3.141592 ; \dots, \quad (2.1)$$

où l'on rajoute à chaque itération une décimale de π est bien croissante mais ne converge pas dans \mathbb{Q} , puisque sa limite π n'est pas dans \mathbb{Q} .

2.3.2 Suites adjacentes

La définition suivante permet de donner un critère efficace de convergence des suites.

Définition 2.3.2. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :*

- Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante ;
- on a, pour tout entier n , l'inégalité $u_n \leq v_n$
- on a la convergence $v_n - u_n \rightarrow_n 0$.

La notion de suites adjacentes tire son intérêt du théorème suivant.

Théorème 2.3.3. *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent (dans \mathbb{R}) et leur limites sont égales. De plus on a, pour tout n entier, l'inégalité*

$$u_n \leq \lim_n u_n = \lim_n v_n \leq v_n.$$

Démonstration. Par définition de suites adjacentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0). Par la propriété 2.3.1, ces suites sont donc convergentes vers des limites finies. De plus, on a

$$\lim_n u_n - \lim_n v_n = \lim_n u_n - v_n = 0,$$

les limites sont donc égales. \square

Une autre forme de ce théorème est la suivante.

Propriété 2.3.4 (Théorème des segments emboîtés). *Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de segments de \mathbb{R} décroissante, c'est-à-dire vérifiant*

$$I_{n+1} \subset I_n$$

et telle que la taille des I_n tende vers 0 au sens ou

$$|\sup I_n - \inf I_n| \rightarrow 0.$$

Alors, l'ensemble $\bigcap_n I_n$ contient un unique élément.

Démonstration. Il suffit de remarquer que les suite $(\inf I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes qui convergent donc vers une limite commune l . On montre alors que $\bigcap_n I_n = \{l\}$. En effet $\inf I_n \leq l \leq \sup I_n$ pour tout n puisque les suites sont adjacentes, donc $l \in \bigcap_n I_n$. De plus, si $x \neq l$, disons pour fixer les idées $l < x$, alors $\sup I_n < x$ à partir d'un certain rang n_0 et donc $x \notin I_{n_0}$. \square

2.3.3 Suites de Cauchy

Un critère puissant et général pour caractériser les suites convergentes est le suivant.

Définition 2.3.5. *On dit qu'une suite de réels est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Cette proposition peut se comprendre comme

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |u_n - u_m| = 0.$$

La propriété importante des suites de Cauchy est la suivante :

Propriété 2.3.6. *Une suite réelle converge dans \mathbb{R} si et seulement si elle est de Cauchy.*

Le fait qu'une suite convergente soit de Cauchy est un fait général, mais la réciproque est directement liée à la complétude de \mathbb{R} . En fait elle lui est équivalente, et on utilise d'ailleurs habituellement la convergence des suites de Cauchy pour définir la complétude. Par exemple la suite définie en (2.1) est une suite de Cauchy de \mathbb{Q} mais ne converge pas dans \mathbb{Q} (sa limite est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente (vers une limite $l \in \mathbb{R}$) et soit ε un réel positif. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n, m \geq N$, on

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \varepsilon.$$

La suite est donc bien de Cauchy.

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy. On remarquera, en prenant par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite de Cauchy, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc définir $l_n = \sup_{k \geq n} u_k$, qui est également une suite bornée (car $l_n \in [\inf_n u_n, \sup_n u_n]$). La suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente vers une limite l , par la propriété 2.3.1. Montrons maintenant que l est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ et $m \geq N$, on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$. On a donc

$$u_n - \varepsilon \leq u_m \leq u_n + \varepsilon.$$

Soit $k \geq N$. En prenant la borne supérieure sur $m \geq k$, on trouve

$$u_n - \varepsilon \leq l_k \leq u_n + \varepsilon,$$

et en prenant la limite en $k \rightarrow \infty$, on obtient

$$u_n - \varepsilon \leq l \leq u_n + \varepsilon.$$

On a donc montré $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . \square

On remarquera qu'on a effectivement eu besoin d'utiliser la complétude de \mathbb{R} pour montrer que les suites de Cauchy convergent, à travers la propriété 2.3.1.

2.3.4 Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

En fait, dans la preuve de la propriété 2.3.6, on a utilisé sans en parler la notion suivante.

Définition 2.3.7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle limite supérieure de la suite la quantité (appartenant à $[-\infty, \infty]$) définie par ^(note 3)

$$\limsup_n u_n = \lim_N \sup_{n \geq N} u_n = \inf_N \sup_{n \geq N} u_n.$$

De même, on appelle limite inférieure la quantité (appartenant à $[-\infty, \infty]$) définie par

$$\liminf_n u_n = \lim_N \inf_{n \geq N} u_n = \sup_N \inf_{n \geq N} u_n.$$

On a toujours l'inégalité

$$\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n.$$

Démonstration de l'inégalité. On a $\inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k$. On conclut en passant à la limite que $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$. \square

L'intérêt de cette notion est que toute suite réelle admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies). On peut donc toujours passer à la limite inférieure ou supérieure, sans avoir à tout d'abord vérifier une quelconque convergence, contrairement aux limites classiques.

Le lien entre la notion de limite supérieure/inférieure et la notion de limite est donné par la propriété suivante.

(note 3). Comme la suite $(\sup_{n \geq N} u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ est décroissante, elle converge vers sa borne inférieure, quitte à considérer une borne inférieure infinie.

Propriété 2.3.8. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$ sont égales, et sa limite est alors donnée par

$$\lim_n u_n = \lim_n \inf_n u_n = \lim_n \sup_n u_n.$$

Démonstration. On ne fait que la preuve dans le cas où les limites sont finies. Le cas des limites infinies est similaire.

Supposons que $\limsup_n u_n = \limsup_n v_n = l$, et soit ε un réel strictement positif. Comme les suites $(\inf_{n \geq N} u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(\sup_{n \geq N} u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ convergent vers l respectivement en croissant et en décroissant, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait

$$l \leq \sup_{n \geq N} u_n \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad l - \varepsilon \leq \inf_{n \geq N} u_n \leq l.$$

On a alors, pour $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq \inf_{n \geq N} u_n \leq u_n \leq \sup_{n \geq N} u_n \leq l + \varepsilon,$$

et $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Inversement, si u_n converge, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier N tel que $|u_n - \lim_n u_n| \leq \varepsilon$. Par conséquent, $u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$. En passant à la borne inférieure, on trouve, pour $n \geq N$

$$\inf_{k \geq n} u_k \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon] \quad \text{d'où} \quad \liminf_n u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$$

et de même pour la limite supérieure. Cette inclusion étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = \lim_n u_n$. \square

Définition 2.3.9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle sous-suite, ou suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où φ est une fonction strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Remarquer que si l'on considère la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et que l'on en extrait à nouveau une sous-suite, le résultat est de la forme $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 2.3.10. On dit que $l \in [-\infty, \infty]$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l . Par extension, on dit que ∞ (ou $-\infty$) est valeur d'adhérence si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers ∞ (ou $-\infty$).

On peut redéfinir les notions de limites supérieures et inférieures à partir de la notion de sous-suites.

Propriété 2.3.11. La limite supérieure (resp. inférieure) d'une suite est la plus grande (resp. petite) de ses valeurs d'adhérence.

Démonstration. Soit $\lambda \in [-\infty, \infty]$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers λ . Or, on a

$$\inf_{k \geq \varphi(n)} u_k \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{k \geq \varphi(n)} u_k.$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on trouve

$$\liminf_n u_n \leq \lambda \leq \limsup_n u_n.$$

Pour montrer que la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence, il ne reste plus qu'à montrer que c'est effectivement une valeur d'adhérence. Pour cela on construit par récurrence une sous-suite de la manière suivante. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit n un entier. On suppose φ défini jusqu'au rang n . On pose alors

$$\varphi(n+1) = \min A_n, \quad \text{avec} \quad A_n = \left\{ k \in \mathbb{N}, k > \varphi(n) \text{ et } u_k \geq \left(\sup_{q > \varphi(n)} u_q - \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

L'ensemble A_n est un sous-ensemble non-vide de \mathbb{N} . Par conséquent, il admet un plus petit élément, et la définition de φ a bien un sens, et par définition, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. La fonction φ définit donc bien une sous-suite. On a alors, pour $n \geq 1$,

$$\sup_{q > \varphi(n-1)} u_q - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{q > \varphi(n-1)} u_q.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on trouve que $u_{\varphi(n)} \rightarrow \limsup_n u_n$. Une construction symétrique convient pour la limite inférieure. \square

On en déduit le résultat suivant.

Propriété 2.3.12. *Une suite converge (dans $[-\infty, \infty]$) ssi elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés 2.3.8 et 2.3.11. \square

Théorème 2.3.13 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente (vers un réel fini).*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée : pour tout n , on a $-M \leq u_n \leq M$ pour un certain réel M . Par conséquent, $-M \leq \limsup_n u_n \leq M$. Par la propriété 2.3.11 ; il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\limsup_n u_n$, ce qui montre le résultat. \square

2.4 Relations de comparaison

On utilise les notations suivantes pour comparer les croissances de deux suites.

Définition 2.4.1 (Notations de Landau). *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

– *On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $u_n = o(v_n)$ (ou parfois $u_n \ll v_n$) si on peut écrire*

$$u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \rightarrow_n 0.$$

Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0 ;$$

– *on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M|v_n|.$$

Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à

$$\left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée ;}$$

– on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $u_n \sim v_n$ si

$$u_n - v_n = o(v_n)$$

Si $v_n \neq 0$, cette définition revient à

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1.$$

On remarquera que les notations $u_n = o(1)$, $1 = o(u_n)$, $u_n = \mathcal{O}(1)$ et $u_n \sim \lambda$ signifient respectivement $u_n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow \infty$, “ u_n est bornée” et $u_n \rightarrow \lambda$.

Les relations o , \mathcal{O} “ressemblent” à des relations d’ordre, et la relation \sim ressemble à une relation d’équivalence, au vu de la propriété suivante :

Propriété 2.4.2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. Alors :

- si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;
- si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$;
- si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$;
- si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Démonstration. Toutes ces preuves sont très similaires, on ne fait que la première. On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Par définition, cela signifie qu’il existe deux suites tendant vers 0, notées $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $v_n = \eta_n w_n$. On peut donc écrire, $u_n = \varepsilon_n v_n = \varepsilon_n \eta_n w_n$. La suite $(\varepsilon_n \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend bien vers 0, ce qui montre que $u_n = o(w_n)$. \square

On utilisera souvent l’écriture très commode $u_n = v_n + o(w_n)$ pour signifier $u_n - v_n = o(w_n)$ (et de même pour les \mathcal{O}).

On fera attention au fait que la relation notée $u_n = o(v_n)$ est plus une relation d’appartenance qu’une relation d’égalité. En effet, $u_n = o(v_n)$ est à comprendre comme

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Une remarque importante est que la relation $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$ est vraie, alors que $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)$ est fausse. En fait ces relations sont des *inclusions* : l’ensemble des suites dominées par 1 est inclus dans l’ensemble des suites dominées par n ($\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(n)$), mais la réciproque n’est pas vraie ($\mathcal{O}(n) \not\subset \mathcal{O}(1)$).

On peut effectuer les opérations suivantes sur les relations de comparaison.

Propriété 2.4.3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, des suites réelles et λ un réel.

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$;
- si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$ et $\lambda u_n = o(u_n)$;
- si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $\lambda u_n = \mathcal{O}(u_n)$;
- on suppose que $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$. Alors $u_n v_n \sim \tilde{u}_n \tilde{v}_n$.

En toute généralité, on ne peut pas sommer des équivalents^(note 4), la notion d’équivalence étant plutôt basée sur la multiplication. Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1) = \frac{1}{n} \text{ n'est pas équivalent à } 1 + (-1) = 0. \quad (2.2)$$

(note 4). Toutefois, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites positives, avec $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, alors $u_n + v_n \sim \tilde{u}_n + \tilde{v}_n$.

De manière générale, on rencontre très rarement la relation $u_n \sim 0$ qui signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Toutefois, si l'on connaît des équivalences $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, et que l'on veut dire quelque chose sur $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut écrire

$$u_n + v_n = (\tilde{u}_n + o(\tilde{u}_n)) + (\tilde{v}_n + o(\tilde{v}_n)) = \tilde{u}_n + \tilde{v}_n + o(\tilde{u}_n) + o(\tilde{v}_n).$$

La question qui se pose alors est de comparer les suites $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'exemple de (2.2) devient alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1) = 1 + o(1) + (-1 + o(1)) = o(1).$$

(car $o(1) = o(-1)$).

Le théorème suivant permet de décrire les vitesses relatives de quelques suites courantes.

Théorème 2.4.4. Soient $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ trois réels. On a ^(note 5)

$$\alpha^{-n} \ll n^{-\beta} \ll \ln^{-\gamma}(n) \ll 1 \ll \ln^{\gamma}(n) \ll n^{\beta} \ll \alpha^n.$$

Avant de commencer la preuve, on énonce un lemme préliminaire :

Lemme 2.4.5. Si $\alpha > 1$, alors $\alpha^n \rightarrow \infty$. Notamment, si $0 < \alpha < \alpha'$, alors $\alpha^n = o(\alpha'^n)$.

Démonstration. Comme $\alpha > 1$, la suite $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (avec $\alpha^0 = 1$). Par conséquent elle converge (dans $[1, \infty]$). On a alors

$$\lim_n \alpha^n = \lim_n \alpha^{n+1} = \lim_n \alpha \alpha^n = \alpha \lim_n \alpha^n.$$

Comme $\alpha > 1$, on a nécessairement $\lim_n \alpha^n = \infty$. Si $0 < \alpha < \alpha'$, on voit que

$$\frac{\alpha'^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^n \rightarrow \infty, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha^n}{\alpha'^n} \rightarrow 0$$

puisque $\frac{\alpha'}{\alpha} > 1$. On a donc bien $\alpha^n = o(\alpha'^n)$. □

Preuve du théorème. En vertu de la propriété 2.2.5, il suffit de montrer

$$1 \ll \ln^{\gamma}(n) \ll n^{\beta} \ll \alpha^n$$

pour $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

Par définition, il existe une constante telle que si $n \in [10^k, 10^{k+1}[$, on ait $\ln(n) \in [Ck, C(k+1)[$. Par conséquent, $\ln(n)$ tend vers l'infini : en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq 10^k$, $\ln(n)/C \geq k$. Cela montre la première relation $1 \ll \ln^{\gamma}(n)$.

La relation $n^{\beta} \ll \alpha^n$ se montre en remarquant que $\frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta}$ qui tend vers 1 (puisque $\frac{1}{n} \rightarrow 0$). Par conséquent, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$, $\frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}} \leq \frac{1+\alpha}{2} \in]1, \alpha[$. On a donc, pour $n \geq N$,

$$n^{\beta} = N^{\beta} \prod_{k=N}^{n-1} \frac{(k+1)^{\beta}}{k^{\beta}} \leq N^{\beta} \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{n-N} = 2^{N+1} N^{\beta} (1+\alpha)^{-N} \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n.$$

(note 5). En toute rigueur, les expressions $\ln(n)$ et n^{β} pour $\beta \notin \mathbb{Z}$ n'ont pas encore été définies. On pourra pour l'instant se limiter aux cas $\beta \in \mathbb{Z}$ et $\gamma \in \mathbb{Z}$, et définir $\ln(n)$ comme étant le nombre de chiffre de n dans une base donnée.

Le lemme 2.4.5 montre que $(\frac{1+\alpha}{2})^n = o(\alpha^n)$.

Pour la relation $\ln^\gamma(n) \ll n^\beta$, on considère k un entier naturel. Pour $n \in [10^k, 10^{k+1}[$, on a $Ck \leq \ln(k) < C(k+1)$ et $10^{k\beta} \leq n^\beta < 10^{(k+1)\beta}$. On a donc $\frac{\ln^\gamma(n)}{n^\beta} \leq \frac{10^\beta}{C^\gamma} \frac{(10^\beta)^k}{k^\gamma}$. En faisant tendre k vers ∞ , les relations déjà montrées donnent $\frac{(10^\beta)^k}{k^\gamma} \rightarrow 0$, ce qui achève la preuve. \square

On en déduit les comparaisons suivantes :

Corollaire 2.4.6. Soient α, β et γ trois réels avec $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ par

$$u_n = \alpha^n n^\beta \ln^\gamma(n).$$

Si $(\alpha, \beta, \gamma) < (1, 0, 0)$ pour l'ordre lexicographique^(note 6), alors la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0. Si $(\alpha, \beta, \gamma) > (1, 0, 0)$, alors la suite tend vers ∞ ^(note 7).

2.5 Suites récurrentes

Définition 2.5.1. On appelle suite récurrente (d'ordre 1) une suite réelle définie par une relation de récurrence de la forme

$$u_0 \in I, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad (2.3)$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans I .

On a un critère simple pour prouver la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriété 2.5.2. Si f est croissante, alors la suite définie par la relation de récurrence (2.3) est monotone.

Démonstration. Supposons $u_0 \leq u_1$. Nous allons montrer par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet, on pose $\mathcal{P}(n) = "u_n \leq u_{n+1}"$. Par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On suppose donc $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Par croissance de f , on obtient donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de la même manière. \square

Le cas f décroissante est un peu plus complexe.

Propriété 2.5.3. Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

De plus si $u_0 \leq u_1$, alors $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n , alors que si $u_0 \geq u_1$, on a $u_{2n} \geq u_{2n+1}$ pour tout n .

Démonstration. On remarque que si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante (puisque si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$ d'où $f(f(x)) \leq f(f(y))$). Mais les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent être définies par les relations de récurrence

$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$

Par la propriété 2.5.2 appliquée à la fonction croissante $f \circ f$, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc monotones.

Enfin, si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence que $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n en appliquant deux fois la fonction f (et de même si $u_0 \geq u_1$). \square

(note 6). Autrement dit, si $\alpha < 1$, ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$, ou encore si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ et $\gamma < 0$. Cela revient à dire que l'on compare d'abord α avec 1, puis β avec 0, puis γ avec 0.

(note 7). Noter que si $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, on a affaire à la suite constante $u_n = 1$.

Si l'on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a un moyen d'identifier les limites possibles.

Propriété 2.5.4. *Si la fonction f est continue, et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.3) converge vers une limite l , alors $l = f(l)$ (note 8).*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, en utilisant la continuité de f . \square

Théorème 2.5.5 (Théorème du point fixe de Picard). *Si la fonction f vérifie la proposition*

$$\exists k < 1, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| < k|x - y|,$$

alors la fonction f a un unique point fixe vers lequel converge la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.3).

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, on montre par récurrence que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$. On en déduit que pour $N \leq p \leq q$, on a

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq |u_p - u_{p+1}| + |u_{p+1} - u_{p+2}| + \dots + |u_{q-1} - u_q| \\ &\leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n |u_1 - u_0| \\ &= \frac{k^p - k^q}{1 - k} |u_1 - u_0| \\ &\leq \frac{k^N}{1 - k} |u_1 - u_0| \\ &\rightarrow_N 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et sa limite l vérifie

$$|f(l) - l| \leq |f(l) - f(u_n)| + |f(u_n) - u_n| + |u_n - l| \leq k|l - u_n| + |u_{n+1} - u_n| + |u_n - l| \rightarrow_n 0.$$

La limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc un point fixe de f . Enfin, si x et y sont deux points fixes de f , on a $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Comme $k < 1$, cela signifie que $x = y$. \square

(note 8). On dit que l est un *point fixe* de f .

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Premières définitions

Une série (réelle ou complexe) est une suite dont les termes sont écrits sous la forme $\sum_{n=0}^N u_n$, où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (réelle ou complexe). On emploiera la notation $\sum u_n$ pour désigner la série $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$. Dans cette écriture, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé *terme général* de la série $\sum u_n$, et les sommes $\sum_{n=0}^N u_n$ sont appelées *sommes partielles* de la série $\sum u_n$. Remarquer que toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être mise sous forme de série, en utilisant l'écriture

$$v_N = \sum_{n=0}^N v_n - v_{n-1},$$

où l'on a posé par convention $v_{-1} = 0$.

Définition 3.1.1. Si la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ admet une limite, on dit que la série $\sum u_n$ est convergente. La limite de $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum u_n$ et est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Pour une série convergente $\sum u_n$, les termes de la suite $\left(\sum_{N=n}^{\infty} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

sont appelés restes de la série.

Il faut être bien conscient du fait que la notation $\sum_{n=0}^{\infty}$ contient une *limite*, et est donc à manier avec précaution. Notamment, on prendra garde à ne pas écrire le reste d'une série, et à ne pas parler de la somme d'une série avant de vérifier la convergence!

Les propriétés sur les suites convergentes donnent la propriété suivante.

Propriété 3.1.2. Une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente, et on a l'identité, pour deux scalaires λ et μ ,

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n).$$

Autrement dit, l'ensemble des séries convergentes constitue un espace vectoriel, et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est linéaire.

Propriété 3.1.3. *Les restes d'une série convergente tendent vers 0.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

le membre de droite étant convergent. □

Propriété 3.1.4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Démonstration. En passant à la limite dans l'égalité

$$u_N = \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

(licite car le membre de droite converge) on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0.$$

□

La réciproque de cette propriété est *fausse*, comme on peut le voir sur l'exemple de la série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*. En effet, le terme général de cette série tend vers 0, alors que la série n'est pas convergente, comme nous allons le voir.

On sait qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Il est donc intéressant de caractériser les séries qui constituent des suites de Cauchy.

Propriété 3.1.5. *Une série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy si et seulement si les sommes $\sum_{n=p}^q u_n$ tendent vers 0 quand p et q tendent vers l'infini, c'est-à-dire qu'elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (N \leq p \leq q) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. C'est une simple réécriture de la définition d'une suite de Cauchy. En effet, on a $\sum_{n=0}^q u_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n = \sum_{n=p}^q u_n$. □

La propriété 3.1.5 nous permet de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$$

Or $\frac{N+1}{2N}$ converge vers 1/2. La série harmonique ne vérifie donc pas le critère de Cauchy : elle diverge.

Définition 3.1.6. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

La propriété suivante permet de réduire l'étude de la convergence de nombreuses séries à l'étude des séries à termes *positifs*.

Propriété 3.1.7. Une série absolument convergente est convergente et vérifie l'inégalité

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Montrons que la série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy.

Par l'inégalité triangulaire, on a, pour $p \leq q$,

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq \sum_{n=p}^q |u_n|.$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy et on a

$$\sum_{n=p}^q |u_n| \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0.$$

Pour montrer l'inégalité, il suffit de remarquer que $\left| \sum_{n=0}^N u_n \right|$ converge ^(note 1) vers $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right|$, et de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|.$$

□

3.2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on va donner des critères de convergence pour les séries à termes positifs. L'intérêt est que la propriété 3.1.7 permet d'en déduire des critères de convergence pour des suites de signe quelconques (ou à valeur complexes).

Propriété 3.2.1. Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général est positif. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Dans ce cas on a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N u_n.$$

(note 1). En effet, l'inégalité $||v_n| - |l|| \leq |v_n - l|$ montre que si $v_n \rightarrow l$, alors $|v_n| \rightarrow |l|$

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. Elle converge alors si et seulement si elle est bornée, et dans ce cas sa limite est égale à sa borne supérieure. \square

Propriété 3.2.2. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif telles que $u_n \leq v_n$.

- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. Comme $u_n \leq v_n$, on a $\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$. Si $\sum v_n$ converge, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Par la propriété 3.2.1, cela montre que $\sum u_n$ converge, ses sommes partielles étant bornées. L'autre implication est la contraposée de la première. \square

Passons maintenant à l'étude de certaines séries particulières.

La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ se montre de manière très simple, et cette série va nous donner des critères de convergence pour d'autres séries :

Propriété 3.2.3. Soit a un nombre complexe. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Démonstration. Premièrement, on écarte le cas $a = 1$, pour lequel les sommes partielles valent $\sum_{n=0}^N 1 = N + 1$, la série étant alors divergente.

Dans le cas $a \neq 1$, on remarque que $(1-a)\sum_{n=0}^N a^n = \sum_{n=0}^N a^n - \sum_{n=1}^{N+1} a^n = 1 - a^{N+1}$. On a donc, en divisant par $1-a$ (qui est non-nul),

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}.$$

La série converge donc si et seulement si a^{N+1} a une limite quand N tend vers l'infini, ce qui revient bien à $|a| < 1$. \square

On remarque que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la seule (à multiplication par une constante près) à vérifier l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. On peut en fait obtenir un critère de convergence proche de celui de la série géométrique pour les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Théorème 3.2.4 (Critère de d'Alembert). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel l .

- si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge ;
- si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Ce critère ne permet toutefois pas de conclure dans le cas $l = 1$ comme on peut le voir sur les exemples $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. En effet, la première série diverge et la deuxième converge (note 2), alors que les rapports de termes consécutifs vérifient

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1.$$

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas $l < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement inférieure à 1, si $l < 1 - \varepsilon < 1$, alors il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \varepsilon$. On peut donc écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^{N-n_0}.$$

On a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0}}{(1-\varepsilon)^{n_0}} (1-\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum (1-\varepsilon)^N$ converge, alors $\sum u_N$ converge aussi, puisqu'elles sont à termes positifs.

Le cas $l > 1$ se traite de manière similaire : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement supérieure à 1, donc pour $1 < 1 + \varepsilon < l$ il existe un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 + \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On écrit

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{N-n_0},$$

ce qui donne $u_N \geq \frac{u_{n_0}}{(1+\varepsilon)^{n_0}} (1+\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum (1+\varepsilon)^N$ diverge, $\sum u_N$ diverge aussi. \square

En fait, on peut énoncer un résultat un peu moins restrictif en utilisant la notion de limites inférieures et supérieures en lieu et place de limites, comme dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.5. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

alors la série $\sum u_n$ converge. Si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

alors la série diverge.

La preuve du théorème 3.2.5 se fait alors exactement comme celle du théorème 3.2.4, en utilisant la propriété suivante des limites supérieures (et inférieures) :

Propriété 3.2.6. *Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = l < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \leq l + \varepsilon$.*

Si $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = l > -\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \geq l - \varepsilon$.

Démonstration. Posons $l = \limsup_n u_n$. On a $\limsup_n u_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} u_k < l + \varepsilon$, donc par définition de la borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k \geq n_0} u_k < l + \varepsilon$, ce qui donne le résultat. \square

(note 2). Voir propriété 3.2.10

On peut énoncer un autre critère de convergence en se basant sur le fait que la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la seule à vérifier $(u_n)^{1/n} = a$. On peut en fait étendre le critère de convergence des séries géométriques aux séries dont le terme général u_n est tel que $(u_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Propriété 3.2.7 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que la suite $(u_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l .*

- Si $l < 1$, alors la série converge ;
- Si $l > 1$, alors la série diverge.

Démonstration. – Si $l < 1$, pour un ε tel que $l < 1 - \varepsilon < 1$, il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$, on a $u_n^{1/n} \leq 1 - \varepsilon$. On a donc, pour $n \geq n_0$, l'inégalité $u_n \leq (1 - \varepsilon)^n$. Comme la série géométrique de raison $1 - \varepsilon$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

- Si $l > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que $u_n^{1/n} > 1$ dès que $n \geq n_0$. On a donc pour $n \geq 0$ $u_n \geq 1$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et la série $\sum u_n$ est donc divergente. \square

On peut affaiblir les hypothèses de ce théorème en remplaçant la limite par une limite supérieure :

Propriété 3.2.8. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

- Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} < 1$, alors la série converge ;
- Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} > 1$, alors la série diverge.

Démonstration. La preuve reste essentiellement la même, on doit juste remarquer que si $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} > 1$, alors $u_n^{1/n} > 1$ pour une infinité de valeurs de n (plutôt que pour tout n assez grand). \square

De même que pour la règle de d'Alembert, on ne peut pas conclure immédiatement dans le cas où la limite supérieure vaut 1, comme on peut le voir sur les exemples des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il existe des cas pour lesquels la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. Par exemple, si on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on remarque que

$$u_n^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^n} = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = 1/2 < 1$, alors que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Par conséquent, la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. La raison est que la règle de Cauchy considère les valeurs de chaque u_n dans l'absolu, alors que la règle de d'Alembert ne considère que les accroissements relatifs entre deux termes consécutifs, qui peuvent être grand alors que les termes de la série sont petits.

On a en fait l'inégalité suivante, qui montre que la règle de Cauchy est plus fine que la règle de d'Alembert.

Propriété 3.2.9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Alors on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Démonstration. Montrons $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On pose $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$. On a donc, pour $N \geq n_0$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (l + \varepsilon) = (l + \varepsilon)^{N-n_0}.$$

On peut donc écrire,

$$u_N^{1/N} = \left(\frac{u_{n_0}}{(l + \varepsilon)^{n_0}} \right)^{1/N} (l + \varepsilon).$$

En passant à la limite supérieure, on trouve

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} u_N^{1/N} \leq (l + \varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup_{N \rightarrow \infty} u_N^{1/N} \leq l = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{u_{N+1}}{u_N}$.

On a donc montré la troisième inégalité. La première se montre de la même manière, et la deuxième est évidente. \square

On veut maintenant pouvoir déterminer le comportement asymptotiques de séries pour lesquelles les règles de Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent pas. L'exemple typique de telles séries étant les séries puissances (ou *séries de Riemann*) du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On a un critère très simple pour la convergence de ces séries.

Propriété 3.2.10. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On sait que si $\alpha < \beta$, alors $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Par conséquent, il suffit de montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, et la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dès que $\alpha > 1$.

Le cas $\alpha = 1$ a déjà été traité, il reste donc à traiter le cas $\alpha > 1$. On écrit

$$\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{(2^N)^\alpha} = \frac{2^{N+1} - 2^N}{(2^\alpha)^N} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^N}.$$

Soit n un entier naturel, et N l'entier tel que $2^N < n < 2^{N+1} - 1$. On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{q=0}^N \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{q=0}^N \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} < \infty.$$

La dernière série converge car $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont donc bornées. Comme la série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. \square

Remarquons que la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} &= (1+1/n)^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln(1+1/n)} \\ &= e^{-\alpha(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} \\ &= 1 - \alpha \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On va en déduire un critère de convergence pour toutes les séries dont le terme général admet un développement limité semblable.

Propriété 3.2.11 (Règle de Duhamel). *Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le développement suivant en $n \rightarrow \infty$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

- si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Supposons $1 < \alpha$. On choisit $1 < 1 + \varepsilon < \alpha$. On a

$$\begin{aligned} n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} \right) &= n \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - n \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= (1 + \varepsilon - \alpha) + o(1). \end{aligned}$$

Cela signifie que la suite de terme général $n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} \right)$ converge vers $1 + \varepsilon - \alpha$, qui est strictement négatif. Par conséquent, cette suite est strictement négative à partir d'un certain rang n_0 . On a donc

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} = \frac{n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}.$$

À partir du rang n_0 , on a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0} n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, alors $\sum u_n$ aussi. La preuve pour le cas $\alpha < 1$ est similaire. \square

Quand on sait comparer les termes généraux de deux séries, on peut en déduire des comparaisons entre les sommes partielles ou les restes des séries, d'après la propriété suivante.

Propriété 3.2.12. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives.*

- Supposons que la série $\sum u_n$ diverge
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = o\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$;
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = O\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$.

- Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=N}^{\infty} v_n$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{\infty} u_n = o(\sum_{n=N}^{\infty} v_n)$;
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{\infty} u_n = O(\sum_{n=N}^{\infty} v_n)$.

Démonstration. On fait seulement la preuve pour le premier cas, les cinq autres étant semblables (ou plus simples). Comme $u_n \sim v_n$, pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que si $n \geq n_0$, on a

$$(1 - \varepsilon)v_n < u_n < (1 + \varepsilon)v_n,$$

ce qui montre que $\sum v_n$ diverge, puisque $\sum u_n$ diverge.

Montrons maintenant l'équivalence des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1 - \varepsilon) \sum_{n=n_0}^N v_n < \sum_{n=0}^N u_n < \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1 + \varepsilon) \sum_{n=n_0}^N v_n.$$

On en déduit l'encadrement

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} + (1 - \varepsilon) \frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} + (1 + \varepsilon) \frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n}.$$

Or, puisque la série $\sum v_n$ diverge, la suite $\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ tend vers ∞ , ce qui implique que $\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^N v_n}$ tend vers 0 et $\frac{\sum_{n=n_0}^N v_n}{\sum_{n=0}^N v_n}$ vers 1. On en conclut

$$1 - \varepsilon < \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N u_n}{\sum_{n=0}^N v_n} < 1 + \varepsilon.$$

Ces inégalités étant vraies pour tout ε , on en déduit que les limites supérieure et inférieure valent 1, et donc que $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$ □

Dans la propriété 3.2.12, il est important que les deux suites soient positives (ou au moins qu'elles soient de signe constant à partir d'un certain rang). En effet, on peut construire le contre-exemple suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$, étant alternée, converge, alors que la série $\sum v_n$ diverge à cause du terme $\frac{1}{n}$. Les deux suites sont pourtant équivalentes.

On énonce maintenant le critère de comparaison séries/intégrales, qui permet de ramener l'étude de certaines séries à l'étude d'intégrales.

Théorème 3.2.13. *Soit $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction continue décroissante. Alors la série*

$$\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$$

converge.

De ce théorème, on déduit que l'étude de la série $\sum f(n)$ peut se ramener à celle de la primitive de f :

Corollaire 3.2.14. *Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.13. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0, \infty[$. De plus,*

– dans le cas où $\sum f(n)$ converge, on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) ;$$

– dans le cas où $\sum f(n)$ diverge, on a le développement

$$\sum_{n=0}^N f(n) = \int_0^N f(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) + o(1). \quad (3.1)$$

Remarquer que dans le développement (3.1), le premier terme tend vers ∞ , alors que le second est constant.

Preuve du théorème 3.2.13. Comme la fonction f est décroissante, on peut écrire

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \text{ si } t \in [n, n+1],$$

d'où on déduit

$$0 \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) - f(n+1).$$

En sommant de $n = 0$ à $n = N$, on obtient les inégalités

$$0 \leq \sum_{n=0}^N \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) \leq \sum_{n=0}^N f(n) - f(N+1) = f(0) - f(N+1).$$

Comme la fonction f est décroissante et minorée, elle converge vers une limite en ∞ . On a donc

$$\sum_{n=0}^N \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) \leq f(0) - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

La série $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$ est donc une série à terme général positif dont les sommes partielles sont bornées. Il s'agit donc d'une série convergente. \square

On peut par exemple déduire du corollaire 3.2.14 le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1),$$

où γ est une constante (dont les premières décimales sont 0.57721), appelée *constante d'Euler* (ou *d'Euler-Mascheroni*). On sait assez peu de chose sur γ , notamment on ignore encore à ce jour si elle est rationnelle ou non.

3.3 Séries à termes complexes

Propriété 3.3.1 (Critère des séries alternées). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante et que deux termes consécutifs soient de signe opposés. Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si $u_N \leq 0$, on a*

$$\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N+1} u_n.$$

On a donc une estimation de la vitesse de convergence :

$$|u_{N+1}| - |u_{N+2}| \leq \left| \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration. Quitte à remplacer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que u_n est du signe de $(-1)^n$.

Considérons les deux suites $(v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(w_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définies par

$$v_N = \sum_{n=0}^{2N+1} u_n \quad \text{et} \quad w_N = \sum_{n=0}^{2N} u_n.$$

On va montrer que ces deux suites sont adjacentes, de sorte qu'elles convergent vers la même limite, ce qui permettra de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

Tout d'abord, on a $w_N = v_N + u_{2N} \geq v_N$, puisque les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'indices pairs ont été supposés positifs. Ensuite, $v_{N+1} - v_N = u_{2N+2} + u_{2N+3} = (|u_{2N+2}| - |u_{2N+3}|) \leq 0$ (puisque la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît), de sorte que $(v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. De même $(w_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin on a $|v_N - w_N| = |u_{2N+1}|$ qui tend vers 0. On a bien affaire à des suites adjacentes. \square

Exemple : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$. De plus, on remarque qu'elle n'est pas absolument convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

On va montrer un résultat plus général que le théorème des séries alternées. On va tout d'abord montrer la propriété suivante, qui est un analogue discret de la formule d'intégration par parties.

Propriété 3.3.2 (Transformation d'Abel). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. On pose*

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad v_n = V_{n+1} - V_n.$$

On a alors, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^N u_n V_n = - \sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N u_n V_n &= \sum_{n=1}^N (U_n - U_{n-1}) V_n + U_0 V_0 = \sum_{n=1}^N U_n V_n - \sum_{n=1}^N U_{n-1} V_n + U_0 V_0 \\
 &= \sum_{n=0}^N U_n V_n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n V_{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}) + U_N V_N \\
 &= - \sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.
 \end{aligned}$$

□

Cette écriture permet de montrer le résultat suivant.

Propriété 3.3.3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Si les sommes partielles de la série $\sum u_n$ constituent une suite bornée et si la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, alors la série $\sum u_n V_n$ converge.

Démonstration. On reprend les notations de la propriété 3.3.2. En notant C un majorant de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=p}^q u_n V_n \right| &= \left| \sum_{n=0}^q u_n V_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n V_n \right| \\
 &= \left| - \sum_{n=0}^{q-1} U_n v_n + U_q V_q + \sum_{n=0}^{p-2} U_n v_n - U_{p-1} V_{p-1} \right| \\
 &\leq \left| \sum_{n=p-1}^{q-1} U_n v_n \right| + |U_q V_q| + |U_{p-1} V_{p-1}| \\
 &\leq C \left(\sum_{n=p-1}^{q-1} |v_n| + |V_q| + |V_{p-1}| \right).
 \end{aligned}$$

Or, comme la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, on a $|v_n| = |V_{n+1} - V_n| = V_n - V_{n+1}$. La somme du membre de droite est donc une somme télescopique, et on obtient

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n V_n \right| \leq C \left(\left(\sum_{n=p}^{q-1} V_n - V_{n+1} \right) + V_q + V_{p-1} \right) = C(V_p + V_{p-1}).$$

Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse quand p et q tendent vers l'infini. La série $\sum u_n V_n$ satisfait donc le critère de Cauchy. □

Un corollaire important de ce théorème est le suivant :

Corollaire 3.3.4. *Pour toute suite décroissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et tout réel θ non multiple de 2π , les séries*

$$\sum e^{in\theta} u_n, \quad \sum \cos(n\theta) u_n \quad \text{et} \quad \sum \sin(n\theta) u_n$$

convergent.

Démonstration. Comme on a

$$\sum \cos(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta} \frac{u_n}{2} + e^{-in\theta} \frac{u_n}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sum \sin(n\theta) u_n = \sum \left(e^{in\theta} \frac{u_n}{2} - e^{-in\theta} \frac{u_n}{2} \right),$$

il suffit d'étudier la série $\sum e^{in\theta} u_n$. Cette série rentre bien dans le cadre de la propriété 3.3.3 puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, et les sommes partielles $\sum_{n=0}^N e^{in\theta}$ vérifient (puisque comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$)

$$\left| \sum_{n=0}^N e^{in\theta} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

□

3.4 Séries doubles

Propriété 3.4.1. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout entier naturel m la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente et si la série $\sum_m (\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m})$ converge, alors, pour tout n , les séries $\sum_m u_{n,m}$ convergent, de même que la série $\sum_n (\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m})$. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right)$$

Démonstration. On a la majoration

$$\sum_{m=0}^M u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_m u_{n,m}$ sont donc majorées, de sorte que cette série converge.

Ensuite, on a

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M u_{n,m} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

En passant à la limite $M \rightarrow \infty$ (ce qui est licite puisque N est fini), on trouve

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m},$$

de sorte que les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ sont bornées. Comme cette série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. En passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Par symétries entre les indices n et m , l'égalité inverse est également vraie, et on en déduit l'égalité des sommes. \square

De même, pour une famille de nombres complexes, on a la propriété :

Propriété 3.4.2. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes indexée par les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout naturel m la série $\sum_n |u_{n,m}|$ est convergente et si la série $\sum (\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|)$ converge, alors les séries $\sum_m |u_{n,m}|$ et $\sum (\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|)$ convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une simple application de la propriété 3.4.1. Pour montrer l'égalité des sommes, on écrit

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) - \sum_{m=0}^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right) \right| &= \left| \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} u_{n,m} \right) - \sum_{m=0}^N \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} u_{n,m} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |u_{n,m}| \right) + \sum_{m=0}^N \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_{n,m}| \right) \\ &= \sum_{m=N+1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^N |u_{n,m}| \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^N |u_{n,m}| \right) \\ &\leq \sum_{m=N+1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}| \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}| \right). \end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0, étant le reste d'une série convergente. \square

On va maintenant énoncer une propriété du *produit de Cauchy*, ou *produit de convolution* de deux séries, défini de la manière suivante.

Définition 3.4.3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On définit leur produit de Cauchy $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la formule

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Le produit de Cauchy est commutatif, puisqu'un changement de variable $q = n - k$ dans la somme précédente donne

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{q=0}^n u_{n-q} v_q.$$

Le produit de Cauchy se comporte bien vis à vis des séries absolument convergentes.

Propriété 3.4.4. Si les séries à termes complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors il en est de même de la série $\sum w_n$, où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. De plus on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^N |w_n| = \sum_{n=0}^N \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|.$$

On peut intervertir les deux sommes en écrivant

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}| = \sum_{k=0}^N \sum_{k=n}^N |u_k| |v_{n-k}| = \sum_{k=0}^N \sum_{q=0}^{N-k} |u_k| |v_q|,$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $q = n - k$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| &\leq \sum_{k=0}^N \sum_{q=0}^N |u_k| |v_q| = \left(\sum_{k=0}^N |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^N |v_q| \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q| \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la série $\sum w_n$ est absolument convergente, les sommes partielles des modules étant bornées. Pour montrer que la somme du produit de Cauchy vaut le produit des sommes, on écrit

$$\left| \sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k=0}^N u_k \right) \left(\sum_{q=0}^N v_q \right) \right| = \left| \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^N u_k \right) \left(\sum_{q=0}^N v_q \right) \right|.$$

En intervertissant les sommes et en faisant le changement de variables $q = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^N u_k \right) \left(\sum_{q=0}^N v_q \right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{n=k}^{2N} u_k v_{n-k} - \sum_{k=0}^N \sum_{q=0}^N u_k v_q \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^N \sum_{k=0}^N u_k v_q \right|. \end{aligned}$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^N \sum_{k=0}^N u_k v_q \right| &= \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2N-q} u_k v_q \right| \\
 &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{2N-k} |u_k| |v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2N-q} |u_k| |v_q| \\
 &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{q=0}^{\infty} |u_k| |v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| |v_q| \\
 &= \left(\sum_{k=N+1}^{2N} |u_k| \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q| \right) + \left(\sum_{q=N+1}^{2N} |v_q| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \right).
 \end{aligned}$$

Les restes d'une série convergente tendent vers zéro, par conséquent le membre de droite tend vers 0, ce qui achève la démonstration. \square

Chapitre 4

Fonctions de la variable réelle

4.1 Étude locale des fonctions

On va utiliser la terminologie suivante, qui sera utile par la suite.

Définition 4.1.1. Un voisinage d'un réel a est un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant un intervalle non-trivial centré en a , c'est à dire un intervalle de la forme $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Par exemple, les ensembles $] - 1, \infty[$, \mathbb{R} , ou $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n - 1/3, n + 1/3]$ sont des voisinages de 0. En revanche, les ensemble $[0, 1]$, $[0, \infty[$ ou \mathbb{Q} n'en sont pas.

Définition 4.1.2. On dit qu'une fonction réelle f définie sur un voisinage I d'un point a a pour limite en a la valeur l si elle vérifie la proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Si la fonction f admet l comme limite au point a , on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \text{ ou encore } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} l.$$

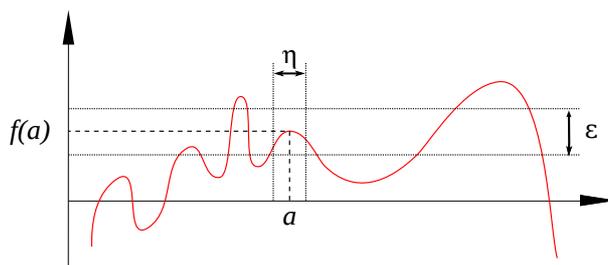


FIGURE 4.1 – Continuité d'une fonction.

On peut également parler des limites à gauche et à droite d'une fonction.

Définition 4.1.3. On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a admet l comme limite à gauche en a si elle vérifie la proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (x \in]a - \eta, a[) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

On peut définir de même la notion de limite à droite.

Si f admet l comme limite à gauche (resp. à droite) en a , on note

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \nearrow a} f(x) = l \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \searrow a} f(x) = l).$$

L'opération de passage à la limite peut être manipulée en utilisant les propriétés suivantes :

Propriété 4.1.4. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout $x \neq a$ dans un voisinage de a on ait

$$f(x) \leq g(x).$$

Si les deux fonctions admettent une limite en a , alors ces limites vérifient

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

La même inégalité est vraie pour les limites à gauche ou à droite.

Démonstration. On va montrer la contraposée : supposons que l'on ait l'inégalité stricte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Pour simplifier, on note $l_f = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $l_g = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. On pose $\varepsilon = (l_f - l_g)/2 > 0$. Soit η tel que pour x dans $]a - \eta, a + \eta[$ on ait $|f(x) - l_f| \leq \varepsilon$ et $|g(x) - l_g| \leq \varepsilon$ ^(note 1). Alors, pour x dans $]a - \eta, a + \eta[$, on a

$$f(x) > l_f - \varepsilon = (l_f + l_g)/2 = l_g + \varepsilon > g(x).$$

La propriété est démontrée. □

Il est important de noter que l'on *ne peut pas* conclure à une inégalité stricte entre les limites si on a seulement inégalité stricte entre les fonctions.

Propriété 4.1.5 (“Théorème des gendarmes”). Soient f , g et h trois fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout x dans un voisinage de a on ait

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h ont une limite en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, alors g admet également une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

(note 1). On peut choisir le même η pour f et g de la manière suivante : on sait qu'il existe des nombres η_f et η_g qui satisfont la propriété respectivement pour f et g . On vérifie alors que $\eta = \min(\eta_f, \eta_g)$ convient pour les deux fonctions.

Démonstration. Soit ε un réel positif. Notons $l = f(a) = h(a)$ la limite commune en a des deux fonctions f et h . On considère η tel que si $|x - a| \leq \eta$ on ait $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|h(x) - l| \leq \varepsilon$.

Si $|x - a| \leq \eta$, on a alors

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon,$$

soit encore $|g(x) - l| \leq \varepsilon$. La fonction g a donc une limite en a , égale aux limites de f et h . \square

Définition 4.1.6. On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a est continue en a si elle admet une limite en a .

Si la fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue en tout point a de I , on dit qu'elle est continue sur I , ou tout simplement qu'elle est continue.

Si f admet une limite à gauche en a et que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue à gauche en a . On définit de même la continuité à droite.

On peut exprimer la continuité à partir des limites à gauche et à droite :

Propriété 4.1.7. Une fonction f définie sur un voisinage de a est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a .

On peut caractériser la continuité de la manière suivante :

Propriété 4.1.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité). Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage d'un point a .

- La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) tendant vers a (et qui prendra donc ses valeurs dans tout voisinage de a à partir d'un certain rang), la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.
- On peut également caractériser de cette manière la continuité à gauche (resp. à droite.) en se limitant aux suites prenant des valeurs strictement inférieures (resp. supérieures) à a .

Démonstration. Supposons la fonction f continue en a , et soit (u_n) une suite convergeant vers a . Soit ε un réel positif. Par continuité de f en a , il existe un réel η tel que si $|x - a| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Mais par convergence de (u_n) vers a , il existe un indice n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|u_n - a| \leq \eta$. En conséquence, si $n \geq n_0$, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Montrons l'implication inverse. Pour cela, nous allons passer par la contraposée. Supposons que la fonction f n'est pas continue. Par conséquent, il existe un réel ε tel que pour tout η , il existe un x_η dans $]a - \eta, a + \eta[$ tel que $|f(a) - f(x_\eta)| \geq \varepsilon$. La suite $(x_{1/n})$ converge vers a (puisque $|x_{1/n} - a| \leq \frac{1}{n}$) sans que $(f(x_{1/n}))$ ne converge vers $f(a)$ (puisque $|f(a) - f(x_{1/n})| \geq \varepsilon$). \square

Propriété 4.1.9. Soient f et g deux fonction continues en un point a . On a les propriétés suivantes :

- pour tout réel λ , la fonction λf est continue en a ;
- la fonction $f + g$ est continue en a ;
- la fonction fg est continue en a ;
- si $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisinage de a . La fonction $\frac{f}{g}$ est alors bien définie sur un voisinage de a et est continue en a .

Autrement dit, l'ensemble des fonction continues en un point a constitue une algèbre.

Démonstration. Laissez en exercice. \square

Propriété 4.1.10. Soient f et g deux fonctions telles que f soit définie sur un voisinage I de a et continue en a , et que g soit définie sur $f(I)$ et continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration. On note pour simplifier $l_g = \lim_{y \rightarrow f(a)} g(y)$ et $l_f = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Soit ε un réel strictement positif. Par continuité de g en $f(a)$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que si y est dans $|f(a) - y| \leq \eta$, alors $|g(y) - l_g| \leq \varepsilon$. Mais alors, par continuité de f en a , on peut trouver un réel strictement positif ζ tel que si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|f(x) - f(a)| \leq \eta$. Par conséquent, si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|g(f(x)) - l_g| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $g \circ f$ admettait l_g comme limite en a . \square

4.2 Fonctions continues sur un intervalle

Le théorème suivant est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle.

Théorème 4.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires). Soit f une fonction continue d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.

Autre formulation :

Théorème 4.2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires 2). Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Si c est tel que $f(a) < c < f(b)$, alors il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = c$.

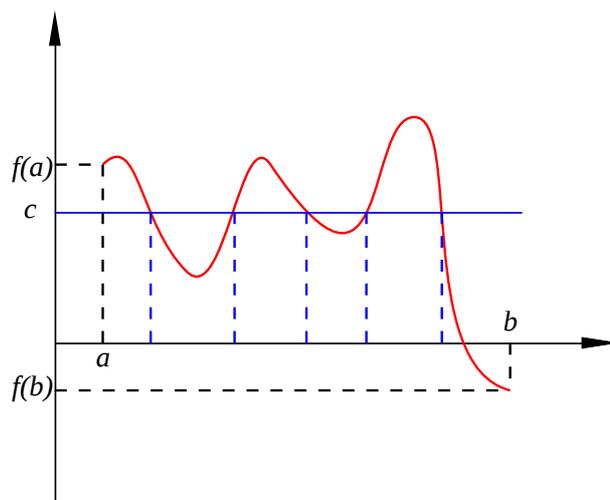


FIGURE 4.2 – Le théorème des valeurs intermédiaires. Aux pointillés bleus, les valeurs possibles de x .

Il est important de comprendre que ce résultat *n'est pas* évident. Il faut bien voir qu'il est entièrement basé sur la *complétude* de \mathbb{R} . Pour s'en convaincre, on peut méditer sur l'exemple de la fonction de \mathbb{Q} dans lui-même qui à x associe $x^2 - 2$. Cette fonction continue prend une valeur négative en 0 et positive en 2, mais ne s'annule jamais (car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel).

Une preuve du théorème des valeurs intermédiaires fera donc appel d'une manière ou d'une autre à la complétude de \mathbb{R} , que ce soit sous la forme de suites de Cauchy, de la propriété de la borne supérieure, de la propriété des segments emboîtés, etc.

Démonstration. On montre la deuxième formulation du théorème. On pose $A_c = \{x \in [a, b], f(x) \leq c\}$. L'ensemble A_c est borné (car contenu dans $[a, b]$). On peut donc définir $x_0 = \sup A_c$. On va montrer que $f(x_0) = c$. Tout d'abord remarquons que par continuité on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < c$ pour x dans $[a, a + \varepsilon]$ et que $f(x) > c$ pour x dans $[b - \varepsilon, b]$. Par conséquent, x_0 est un élément de $]a, b[$. Ensuite, on remarque que $f(x) > 0$ sur $]x_0, c]$. Par continuité, on obtient $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \geq c$. D'autre part, comme x_0 est la borne supérieure de A_c , il existe une suite (y_n) d'éléments de A_c qui converge vers x_0 . Or $f(y_n) \leq c$, d'où $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq c$. On déduit que $f(x_0) = c$. \square

Propriété 4.2.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe y et z dans $[a, b]$ tels que*

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z) \text{ pour tout } x \text{ de } [a, b].$$

Démonstration. Ce résultat est basé sur la compacité de l'intervalle $[a, b]$. Il faudra donc à un moment de la preuve utiliser cette propriété, par exemple avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On pose $M = \sup f([a, b])$ (qui peut être infini), et on choisit une suite (x_n) telle que $(f(x_n))$ converge vers M . On extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente dont on note z la limite. Par continuité de f , la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(z)$, d'où $M = f(z)$. On a donc montré que la fonction atteint sa borne supérieure. Le cas de la borne inférieure se fait de manière symétrique. \square

Définition 4.2.4. *Soit f une fonction de I un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que f est uniformément continue si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Cette définition signifie intuitivement que la fonction f est continue "partout de la même manière". Il est intéressant de comparer cette définition avec celle de continuité. La continuité sur I s'exprime par l'expression

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \eta > 0, \forall y \in I, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

En revanche, l'uniforme continuité s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit, dans le cas de la continuité simple, η peut dépendre de x , alors que pour l'uniforme continuité η doit être le même pour tout x . On voit notamment que :

Propriété 4.2.5. *Une fonction uniformément continue est continue.*

La réciproque de cette propriété est bien entendu fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ (en effet les points n et $n + 1/n$ vérifient $|n - (n + 1/n)| = 1/n \rightarrow 0$, alors que $|f(n) - f(n + 1/n)| = |n^2 - (n^2 + 2 + 1/n^2)| > 2$).

Théorème 4.2.6 (Théorème de Heine). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. On va montrer la contraposée. La proposition " f n'est pas uniformément continue sur I " s'écrit avec les quantificateurs

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, \exists y \in I, (|x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$$

Choisissons un tel ε . On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass on en extrait des suites convergentes $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ (on est sur le segment $[a, b]$)^(note 2). Comme on a $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$, les deux suites ont la même limite l . Comme $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, la fonction f n'est pas continue. \square

On a encore une propriété plus forte :

Définition 4.2.7. On dit qu'une fonction de I dans \mathbb{R} est Lipschitzienne si il existe une constante k telle que pour x et y dans I , on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Propriété 4.2.8. Une fonction Lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration. Pour ε donné, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/k$. \square

La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (en effet, les points 0 et $1/n$ vérifient $|\sqrt{1/n} - \sqrt{0}| = \sqrt{1/n} \geq \sqrt{n}|1/n - 0|$).

4.3 Dérivation

Définition 4.3.1. On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a est dérivable en a si la quantité $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, appelée taux d'accroissement converge vers une limite quand h tend vers 0. La limite du taux d'accroissement est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f au point a .

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert est dérivable si elle est dérivable en tout point de I . On peut alors définir sur I la fonction f' appelée dérivée de f .

Au vu de cette définition, dire qu'une fonction est dérivable en un point a revient à dire que cette fonction est proche d'une fonction affine au voisinage de a . Plus précisément f est proche de la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a)$$

(voir la deuxième remarque après le corollaire 4.5.7).

Pour être dérivable, une fonction doit forcément être continue.

Propriété 4.3.2. Si f est une fonction définie au voisinage d'un point a et est dérivable au point a , alors f est continue au point a .

Démonstration. Si f est dérivable en a , on a

$$|f(a+h) - f(a)| = h \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right|.$$

Or $\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right|$ converge (vers $|f'(a)|$) quand h tend vers 0 donc reste borné, de sorte que

$$|(a+h) - f(a)| \leq Ch \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

\square

(note 2). On peut prendre la même fonction extractrice φ pour (x_n) et (y_n) en extrayant d'abord une sous-suite convergente $(x_{\varphi_0(n)})$ de (x_n) puis en extrayant une sous-suite convergente $(y_{\varphi_0(\varphi_1(n))})$ de $(y_{\varphi_0(n)})$. On pose alors $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$.

En revanche on peut trouver des fonctions continues mais non dérivables :

Propriété 4.3.3. Si a et b sont deux réels vérifiant $|a| < 1$ et $|ab| > 1$, alors la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

est continue sur \mathbb{R} mais dérivable en aucun point.

Cette propriété se comprend bien en remarquant que la série $\sum a^n$ converge, alors que la série $\sum (ab)^n$ diverge (ceci ne constitue bien entendu pas une preuve complète !). Sur la figure 4.3, on a représenté la fonction f pour les valeurs $a = 0.5$ et $b = 4$.

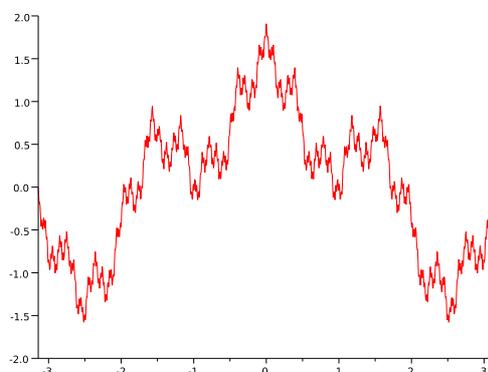


FIGURE 4.3 – Un exemple de fonction continue mais dérivable en aucun point.

Démonstration. Admis. □

La dérivabilité est stable par les opérations suivantes :

Propriété 4.3.4. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a .

- La fonction $f + g$ est dérivable au point a et on a $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- La fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;
- La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$;
- Si $f(a)$ est non-nul, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

Démonstration. Les propriétés de linéarité viennent des propriétés équivalentes pour les limites.

Pour le produit, on écrit

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Les quantités $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $g(a+h)$, $f(a)$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ convergent respectivement vers $f'(a)$, $g(a)$, $f(a)$ et $g'(a)$, et on sait que l'on peut passer à la limite dans un produit.

Pour l'inverse d'une fonction, on écrit (comme f est continue, on a $f(a+h) \neq 0$ pour h assez petit)

$$\frac{\frac{1}{f}(a+h) - \frac{1}{f}(a)}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)},$$

qui converge bien vers la limite voulue. \square

Par récurrence, en appliquant plusieurs fois la formule $(fg)' = f'g + fg'$, on obtient la formule suivante :

Propriété 4.3.5 (Formule de Leibniz). *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a , on a*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a).$$

On peut aussi composer les fonctions dérivables :

Propriété 4.3.6. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point a et g une fonction définie sur $f(I)$ et dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soit h un réel positif. On a

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \frac{g(f(a) + hf'(a) + h\tau_h) - g(f(a))}{h},$$

où l'on a posé $\tau_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En conséquence,

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \frac{g(f(a) + hf'(a) + h\tau_h) - g(f(a))}{(f'(a) + \tau_h)h} (f'(a) + \tau_h),$$

qui tend bien vers $g'(f(a))f'(a)$ quand h tend vers 0. \square

Propriété 4.3.7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a . Si a est un extremum local pour la fonction f , alors $f'(a) = 0$.*

On rappelle que si il existe un voisinage I d'un point a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout x dans I , on dit que a est un *maximum local* de f (ou que f admet un maximum local en a), si $f(a) \leq f(x)$ pour x dans I on dit que a est un *minimum local*, et que si a est un minimum local ou un maximum local, on dit que a est un *extremum local*.

Sur la figure 4.4, on voit que la fonction a une dérivée nulle en ses extrema a_i , sauf en a_1 et a_7 , situés aux bornes de l'intervalle de définition, puisque la fonction n'est pas définie sur un *voisinage* de ces points.

Démonstration. On peut supposer (quitte à changer f en $-f$) que a est un maximum local pour f . On a donc, pour h assez petit $f(a+h) \leq f(a)$. En conséquence,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ et } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

En conséquence, on a bien $f'(a) = 0$. \square

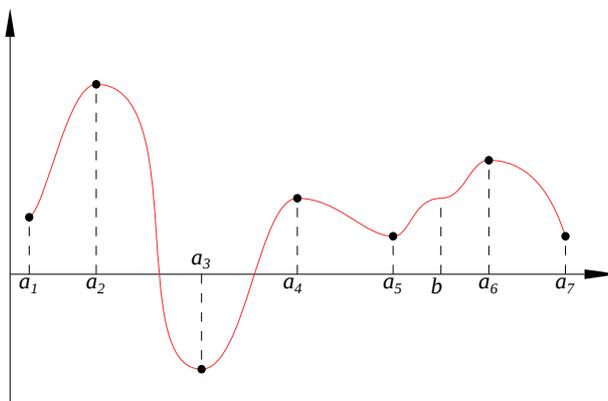


FIGURE 4.4 – Extrema d’une fonction. Les points a_i sont des extrema de la fonction représentée.

Il est important de remarquer que l’on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f atteigne un minimum en a . L’exemple le plus classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui a une dérivée nulle en 0. C’est également le cas de la fonction représentée en figure 4.4 au point b .

Théorème 4.3.8 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le résultat est évident si la fonction f est constante égale à $f(a)$ sur l’intervalle $[a, b]$, car la dérivée de f est alors nulle en tout point de $]a, b[$.

On peut donc supposer que f est non constante, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu’elle prend une valeur strictement supérieure à $f(a)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point c , qui est distinct de a et b (puisque la fonction atteint une valeur strictement supérieure à $f(a) = f(b)$). Par la propriété 4.3.7, on déduit que $f'(c) = 0$. \square

Théorème 4.3.9 (Théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , dérivable sur $]a, b[$. Il existe un élément c de $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Si la dérivée de f est bornée, on déduit notamment de cette formule l’inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{[a, b]} |f'(x)|.$$

Ce théorème se comprend très bien par un exemple de la vie courante : si vous vous déplacer en voiture sur l’autoroute en respectant la limite de 130km/h, en une heure vous vous trouverez nécessairement à moins de 130 kilomètres de votre point de départ.

Démonstration. Il suffit d’appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La fonction g est dérivable sur $]a, b[$ (comme somme de f et d'un polynôme) et vérifie $g(a) = 0$, $g(b) = 0$. Le théorème de Rolle nous permet de conclure qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. \square

Propriété 4.3.10. Soit f une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert. Alors :

- f est croissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \geq 0$ pour tout x ;
- f est décroissante si et seulement si elle vérifie $f'(x) \leq 0$ pour tout x ;
- f est constante si et seulement si elle vérifie $f'(x) = 0$ pour tout x .

Démonstration. Supposons que f est croissante. Si $h > 0$ alors, $f(x+h) - f(x) \geq 0$, d'où $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. De même, si $h < 0$, on a $f(x+h) - f(x) \leq 0$, de sorte $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. En passant à la limite $h \rightarrow 0$, on trouve donc $f'(x) \geq 0$. De même, on montre qu'une fonction décroissante a une dérivée négative. Par conséquent, une fonction constante, qui est croissante et décroissante, a une dérivée à la fois positive et négative. Cette dérivée est donc nulle.

Inversement, soit f une fonction ayant une dérivée positive sur l'intervalle $]a, b[$, et soient $\alpha < \beta$ deux points de $]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, on peut trouver c dans $]a, b[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha) \geq 0$ (puisque f' est uniformément nulle). Par conséquent, $f(\alpha) \leq f(\beta)$, ce qui montre que f est croissante. De même on montre qu'une fonction à dérivée négative est décroissante et par conséquent, qu'une fonction à dérivée nulle (c'est à dire à la fois positive et négative) est à la fois croissante et décroissante, et donc constante. \square

Cette propriété n'est vraie que si f est définie sur un intervalle, comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] - 1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in] 0, 1[\end{cases},$$

qui a une dérivée nulle sans être constante. Autre exemple : la fonction définie sur \mathbb{R}^* qui à x associe $1/x$ a une dérivée strictement négative en tout point de \mathbb{R}^* , mais n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* .

Corollaire 4.3.11. Si f et g sont deux fonctions dérivables définies sur un même intervalle I et telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout x de I , alors elles ne diffèrent que par une constante :

$$f = g + f(a) - g(a),$$

pour tout a de I .

Démonstration. La fonction $f - g$ a une dérivée uniformément nulle, elle est donc constante. \square

4.4 Comportement asymptotique des fonctions

4.4.1 Relations de comparaison

Les trois notions suivantes permettent de comparer la taille relative de plusieurs fonctions en un point donné.

Définition 4.4.1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a .

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a si il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout x dans un voisinage de a .
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si il existe une fonction ε définie au voisinage de a dont la limite en a vaut 0 et telle que $|f(x)| \leq |\varepsilon(x)g(x)|$.
- On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g$ est négligeable devant g .

Les notations suivantes (appelées *notations de Landau*) peuvent s'avérer très puissantes si l'on sait les manier correctement. Il y a notamment quelques pièges à éviter.

Définition 4.4.2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a .

- Si f est négligeable devant g au point a , on notera $f(x) = o_a(g(x))$ ou " $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a " ou même $f(x) = o(g(x))$ tout court si il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a .
- Si f est dominée par g au point a , on notera $f(x) = O_a(g(x))$ ou $f(x) = O(g(x))$.
- Si f est équivalent à g au point a , on notera $f(x) \sim_a g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$.

On notera bien que le signe "=" devant les $O(\dots)$ et $o(\dots)$ ne désigne pas une égalité! Notamment en 0 on a bien $o(x^2) = o(x)$ alors que $o(x) = o(x^2)$ est faux. En toute rigueur, il faudrait plutôt écrire $f(x) \in o(g(x))$, où l'on noterait $o(g(x))$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g . L'exemple précédent reviendrait alors à dire que $o(x^2) \subset o(x)$ alors que $o(x) \not\subset o(x^2)$. On voit bien que les deux fonctions ne jouent pas un rôle symétrique.

L'autre danger de ces notation est qu'il ne faut pas utiliser le signe \sim comme une égalité, même si on a équivalence entre $f \sim g$ et $g \sim f$. Notamment, il faut se garder d'ajouter des équivalents. Par exemple, on a les équivalences en 0

$$\sin(x) \sim x \text{ et } \tan(x) \sim x, \quad (4.1)$$

sans toutefois avoir $\sin(x) - \tan(x) \sim 0$. En réalité, on trouve

$$\sin(x) - \tan(x) \sim -\frac{x^3}{2}.$$

Notamment, on évitera d'utiliser la notation $f(x) \sim_a 0$, qui signifie que f est nulle sur un voisinage de a . Si on doit ajouter deux quantités dont on ne connaît que des équivalents, il faut revenir à la définition : dans l'exemple (4.1) les équivalents signifient

$$\sin(x) = x + o(x) \quad \text{et} \quad \tan(x) = x + o(x).$$

On a donc

$$\sin(x) - \tan(x) = x + o(x) - x + o(-x) = o(x)$$

On pourra aussi méditer sur un exemple comme $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, qui est vrai, mais $\cos(x) \sim 1 + 666x^{42}$ est tout aussi vrai.

Propriété 4.4.3. Pour une fonction g définie sur un voisinage V de a telle que $g(x) \neq 0$ pour x dans $V \setminus \{a\}$, on a équivalence entre $f(x) \sim g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Démonstration. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour une certaine fonction tendant vers 0 quand x tend vers a . Pour $x \neq a$, on peut alors diviser cette égalité par $g(x)$ pour obtenir

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \varepsilon(x),$$

ce qui montre bien que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 pour x tendant vers a .

Inversement, si l'on suppose que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1, alors en posant $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$, on a bien $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ pour x tendant vers 0 quand x tend vers a . \square

4.4.2 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a admet un développement limité à l'ordre n en a si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o_a((x - a)^n).$$

En pratique on préférera se ramener, par le changement de variables $x = a + h$ à l'écriture

$$f(a + h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o_0(h^n),$$

qui permet de ne considérer que des développements limités en 0.

Propriété 4.4.4. Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 telle que f' soit continue et admette un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f'(x) = P_n(x) + o(x^n).$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$, donné par

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y) dy + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, on peut intégrer un développement limité.

Démonstration. On écrit $f'(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$, où ε est une fonction tendant vers 0 en 0. En intégrant entre 0 et x , on trouve

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y) dy + \int_0^x y^n \varepsilon(y) dy$$

(l'intégrale a bien un sens, puisque $x^n\varepsilon(x) = -P_n(x) + f'(x)$ est continue). Il reste alors simplement à écrire

$$\left| \int_0^x y^n \varepsilon(y) dy \right| \leq \sup_{y \in [-x, x]} |\varepsilon(y)| \int_0^x y^n dy = \frac{1}{n+1} \sup_{y \in [-x, x]} |\varepsilon(y)| x^{n+1}.$$

La fonction $x \mapsto \sup_{y \in [-x, x]} |\varepsilon(y)|$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. \square

Propriété 4.4.5. Soit g une fonction admettant un développement limité en un point a à l'ordre n

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \dots + \alpha_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre m en α_0

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha_0) + \dots + \beta_m(x - \alpha_0)^m + o((x - \alpha_0)^m)$$

alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $\min(n, m)$ en a , obtenu en composant les développements limités de f et g

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = & \beta_0 + \beta_1(\alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n) + \dots \\ & + \beta_m(\alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n)^m \\ & + o((x-a)^{\min(m, n)}), \end{aligned}$$

en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à $\min(n, m)$.

Démonstration. On écrit les termes négligeables explicitement sous la forme $(x-a)^n \varepsilon_1(x-a)$ et $(x-\alpha_0)^m \varepsilon_2(x-\alpha_0)$, où $\varepsilon_1(y)$ et $\varepsilon_2(y)$ tendent vers 0 lorsque y tend vers 0. On remplace ensuite le développement de $g(x)$ dans celui de $f(x)$ et on développe. \square

4.5 Développement de Taylor

Définition 4.5.1. Soit f une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable et si sa dérivée est continue. De même on définit par récurrence les fonctions de classe \mathcal{C}^{k+1} comme les fonctions dont la dérivée est de classe \mathcal{C}^k . On définit également les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ comme les fonctions qui sont de classe \mathcal{C}^k pour tout entier k .

L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Définition 4.5.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point a . On dit que f est n fois dérivable au point a si elle est de classe \mathcal{C}^{n-1} au voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a .

Si f est n fois dérivable en tout point d'un intervalle I de \mathbb{R} , on dit qu'elle est n fois dérivable sur I .

L'ensemble des fonctions de classe k fois dérivable d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est parfois noté $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$.

Propriété 4.5.3. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) est stable par combinaison linéaire et par produit.

Démonstration. Cela se déduit des propriétés de dérivabilité d'un produit ou d'une combinaison linéaire. \square

On veut approcher une fonction f par un polynôme. Une manière naturelle de faire au voisinage d'un point a est d'approcher $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$ qui est l'unique polynôme de degré inférieur à n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n en a sont les mêmes que celles de f (note 3).

Théorème 4.5.4 (Formule de Taylor avec reste intégral). Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un voisinage du point a , alors on a, pour tout h suffisamment petit, le développement :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x) dx.$$

(note 3). On se rappellera que l'ensemble des polynôme de degré inférieur à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$ et que $(1, X, \dots, \frac{X^n}{n!})$ en est une base dont la base duale $(\delta_a^{(k)})$ est définie par $\delta_a^{(k)}(P) = P^{(k)}(a)$.

Le reste intégral peut aussi s'écrire, après le changement de variables $x = a + th$ comme

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) dt.$$

On remarquera que dans le cas $n = 1$, la formule de Taylor avec reste intégral est simplement la formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ exprimant une fonction C^1 comme l'intégrale de sa dérivée.

Démonstration. C'est une récurrence sur n utilisant la formule d'intégration par parties. Pour $n = 0$, l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} f'(x) dx$$

exprime simplement la fonction comme l'intégrale de sa dérivée. En supposant vraie l'égalité au rang n , on montre l'égalité au rang $n+1$ en intégrant par parties ($f^{(n+1)}$ se dérive en $f^{(n+2)}$ et $\frac{1}{n!}(a+h-x)^n$ se primitive en $-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x) dx &= \left[-\frac{1}{(n+1)!} (a+h-x)^{n+1} f^{(n+1)}(x) \right]_a^{a+h} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^{a+h} (a+h-x)^{n+1} f^{(n+2)}(x) dx \\ &= 0 + \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(a) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^{a+h} (a+h-x)^{n+1} f^{(n+2)}(x) dx. \end{aligned}$$

□

On peut affaiblir l'hypothèse "f de classe C^{n+1} " quitte à avoir une expression moins précise du reste.

Théorème 4.5.5 (Formule de Taylor-Lagrange). *Si f est une fonction définie sur un voisinage de a telle que f soit de classe C^n et que $f^{(n)}$ soit dérivable, alors on a pour tout h assez petit*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \alpha h),$$

pour un certain α de $[0, 1]$. Notamment, si $f^{(n+1)}$ est bornée, on en déduit la majoration de l'erreur :

$$\left| f(a+h) - \left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} \right) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| f^{(n+1)}(a + \alpha h) \right|.$$

On remarquera que le cas $n = 0$ est exactement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. On pose

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(1-t)^k h^k f^{(k)}(a+th)}{k!} - \lambda(1-t)^{n+1}.$$

On vérifie alors que φ est dérivable, puisque f est de classe \mathcal{C}^n et que $f^{(n)}$ est dérivable. On a $\varphi(0) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!} - \lambda$ et $\varphi(1) = f(a+h)$. Le choix

$$\lambda = f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

permet donc d'avoir $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ . Il existe donc un α dans $[0, 1]$ tel que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\alpha h)}{n!} - (n+1)\lambda(1-\alpha)^n = 0,$$

et la définition de λ permet de conclure. \square

On peut également se passer de l'hypothèse selon laquelle $f^{(n)}$ est dérivable en cherchant une expression encore moins fine du reste.

Théorème 4.5.6 (Formule de Taylor-Young). *Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n-1} telle que $f^{(n-1)}$ soit dérivable, alors on a le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Le cas $n=0$ est simplement la définition de la continuité de f en a , et le cas $n=1$ est la définition de la dérivabilité de f en a .

Démonstration. On le montre par récurrence.

Le cas $n=1$ correspond à la définition de la dérivabilité de f en a .

Supposons la propriété vraie au rang n . Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^n avec $f^{(n)}$ dérivable, alors f' est de classe \mathcal{C}^{n-1} et sa dérivée $n-1^{\text{ème}}$ est dérivable, on peut donc lui appliquer la propriété, de sorte que

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2 f'''(a)}{2} + \dots + \frac{h^n f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Il suffit ensuite d'intégrer ce développement limité en vertu de la propriété 4.4.4. \square

Il est important de remarquer que dans chacun de ces trois cas, les hypothèses sont les hypothèses "minimales" pour écrire la formule. À chaque fois on suppose un cran de régularité en moins, et la conclusion est légèrement plus faible.

Corollaire 4.5.7. *Une fonction n fois dérivable en un point a admet un développement limité à l'ordre n au point a .*

Quelques remarques :

- La réciproque de ce théorème est *fausse!* Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une fonction f continue mais non dérivable, vérifiant $f(0) = 0$. On pose ensuite $f_n(x) = x^n f(x)$. Comme f est continue en 0, on a par définition $f_n(x) = o(x^n)$ en 0. Cependant la fonction f_n n'est dérivable qu'au point $x = 0$.
- Toutefois une partie de la réciproque pour $n = 1$ est vraie. En effet, le développement limité à l'ordre 1, $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$ revient exactement à la définition de la dérivabilité de f en x avec $f'(x) = \lambda$. En fait ce qui empêche de passer à n supérieur à 1 est le fait qu'un développement limité donne de l'information sur la fonction (par exemple si elle est dérivable), mais pas sur ses dérivées (par exemple il n'indique pas que la dérivée est dérivable).

4.5.1 Développement des fonctions usuelles

On peut appliquer la formule de Taylor-Young, ou la propriété 4.4.4, pour trouver les développements limités en 0 des fonctions usuelles.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (définition) ;}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \text{ (partie réelle de } e^{ix}) \text{ ;}$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (partie imaginaire de } e^{ix}) \text{ ;}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (série géométrique) ;}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (primitive de } (1+x)^{-1}) \text{ ;}$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (primitive de } (1+x^2)^{-1}) \text{ ;}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (Taylor-Young).}$$

Chapitre 5

Intégration

5.1 Intégration sur un segment

La théorie de l'intégration au programme du concours du CAPES est l'intégrale de Riemann. Nous allons revenir sur la construction de cette intégrale. La définition de l'intégrale elle-même n'est pas au programme, mais il me paraît raisonnable d'en avoir une idée assez concrète.

La notion d'intégrale a pour objectif d'associer au plus grand nombre possible de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} un nombre, noté $\int_a^b f(x)dx$, qui correspondrait à la "taille" de cette fonction. On peut notamment penser à la surface présente sous le graphe de la fonction.

On s'attend à ce que l'intégrale vérifie les propriétés "évidentes" suivantes :

(croissance) Si f et g sont deux fonctions ayant une intégrale et telles que $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(linéarité) Si f et g sont deux fonctions admettant une intégrale et λ et μ deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet une intégrale qui vaut

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

(cas des fonctions élémentaires) Une fonction de la forme $\mathbf{1}_{(\alpha, \beta)}$ ^(note 1), ^(note 2), où $\alpha \leq \beta$ sont des éléments de $[a, b]$, a une intégrale, donnée par

$$\int_a^b \mathbf{1}_{(\alpha, \beta)} = \beta - \alpha.$$

Nous allons maintenant partir de ces trois propriétés élémentaires pour en déduire une notion d'intégrale pouvant s'appliquer à une classe plus grande de fonctions, contenant notamment toutes les fonctions continues sur $[a, b]$.

(note 1). Les parenthèses désignent des crochets ouverts ou fermés

(note 2). Pour une partie A de \mathbb{R} fonction $\mathbf{1}_A$, appelée *indicatrice* de A est définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Définition 5.1.1. – On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ une suite finie

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La quantité $\max_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$ s'appelle le pas de la subdivision.

– On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est en escalier si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Une fonction en escalier est donc de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[}(x) + \sum_{i=0}^n \mu_i \mathbf{1}_{\{x_i\}}(x),$$

avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. La propriété de linéarité permet de définir l'intégrale d'une fonction en escalier à partir des intégrales de fonctions élémentaires : en effet, on peut écrire

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[}(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[}(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1}).$$

Noter que les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\{c\}}$ ont une intégrale nulle, on va donc les oublier dans le reste du chapitre.

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On suppose que la fonction f admet une intégrale. Si v et w sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $v \leq f \leq w$, la propriété de croissance nous donne l'inégalité suivante, illustrée sur la figure 5.1

$$\int_a^b v(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b w(x) dx.$$

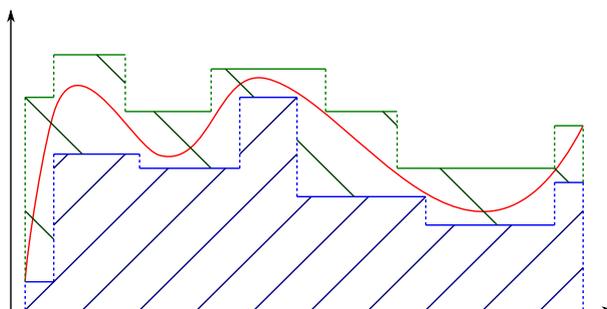


FIGURE 5.1 – Encadrement d'une fonction par des fonctions en escalier. L'aire sous la courbe est encadrée par les deux surfaces hachurées.

En passant à la borne supérieure sur toutes les fonctions v en escalier inférieures à f et à la borne inférieure sur toutes les fonctions w en escalier supérieures à f , on obtient l'encadrement

$$\sup_{v \leq f} \int_a^b v(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \inf_{f \leq w} \int_a^b w(x) dx.$$

On est donc amenés naturellement à la définition suivante :

Définition 5.1.2. On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est intégrable si

$$\sup_{v \leq f} \int_a^b v(x) dx = \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x) dx,$$

où les bornes supérieures et inférieures sont calculées sur l'ensemble des fonctions en escalier v respectivement inférieures et supérieures à la fonction f . On définit alors l'intégrale de f comme la valeur

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{v \leq f} \int_a^b v(x) dx = \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x) dx.$$

Le principe de cette définition est le suivant : on sait intégrer les fonctions en escalier, dont les graphes ne sont que des réunions de rectangles, la propriété de croissance de l'intégrale permet donc d'encadrer l'hypothétique intégrale d'une fonction f par les bornes inférieures et supérieures de la définition 5.1.2. Quand ces deux bornes sont égales, l'intégrale de la fonction, si elle existe, *ne peut pas* valoir autre chose que la valeur commune de ces deux bornes. On définit donc l'intégrale de f de cette manière.

On utilise également la convention suivante, de sorte que la relation de Chasles soit vérifiée :

Définition 5.1.3. Si $b \leq a$ et si f est une fonction intégrable sur $[b, a]$ on définit

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Cette convention donne la propriété suivante :

Propriété 5.1.4 (Propriété de Chasles). Si a, b et c sont trois réels et si f est fonction intégrable définie sur un segment I contenant a, b et c , alors

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Démonstration. Supposons que $a \leq b \leq c$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= \int_a^c \mathbf{1}_{[a,b]}(x) f(x) dx + \int_a^c \mathbf{1}_{]b,c]}(x) f(x) dx \\ &= \int_a^c (\mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{]b,c]}(x)) f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Si $a \leq c \leq b$ on fait un calcul similaire en utilisant la convention de la définition 5.1.3 et en remarquant que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) - \mathbf{1}_{[c,b]}(x) = \mathbf{1}_{[a,c]}(x)$. Les autres cas se traitent de manière similaire. \square

Nous allons maintenant voir une manière plus explicite de calculer l'intégrale.

Définition 5.1.5. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, et $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à la subdivision $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ toute somme de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

où c_i est un élément de $[x_i, x_{i+1}]$.

On a la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Propriété 5.1.6. Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées aux subdivisions de $[a, b]$ convergent quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Plus précisément f est intégrable si et seulement la proposition suivante est vraie :

$$\exists \lambda, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x_i)_{i=0, \dots, n}, \left(\text{Pas}(x_i)_{i=0, \dots, n} < \eta \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) - \lambda \right| \leq \varepsilon \right).$$

Le réel λ est alors nécessairement égal à $\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration. Admis. □

Un cas particulier important en pratique, notamment pour calculer des limites de sommes, est le cas de la subdivision uniforme $(u_i^{[a,b],n})_{i \in \{0, \dots, n\}}$ sur $[a, b]$ définie par

$$u_i^{[a,b],n} = a + \frac{i}{n}(b - a).$$

Le pas de cette subdivision vaut $\frac{(b-a)}{n}$.

Le programme du CAPES se limite à un sous-ensemble des fonctions intégrables plus simple à caractériser, qui contient les fonctions continues. Il s'agit de l'ensemble des fonctions *continues par morceaux*, défini ci-dessous.

Définition 5.1.7. On dit qu'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ est continue par morceaux si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ de $[a, b]$ telle que $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ soit continue et admette des limites en x_i^+ et en x_{i+1}^- .

Propriété 5.1.8. Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est intégrable.

Dans la suite de ce chapitre, on ne considérera que des intégrales de fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux conserve une propriété importante des fonctions continues : elles sont bornées sur les segments.

Propriété 5.1.9. Une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est bornée.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une subdivision de $[a, b]$ associée à une fonction continue f . Pour $i = 1, \dots, n$, la fonction f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ et admet des limites finies en x_{i-1} et x_i . Par conséquent, elle se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et est donc bornée sur $]x_{i-1}, x_i[$. On a donc, pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x)| \leq \max \left(\max_{i=1}^n \sup_{]x_{i-1}, x_i[} |f|, \max_{i=0}^n |f(x_i)| \right) < \infty.$$

Le maximum de la formule précédente est fini car il n'y a qu'un nombre *fini* de termes dans ce maximum. □

Deux inégalités utiles pour encadrer des intégrales :

Propriété 5.1.10 (Inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire). *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, alors on a l'inégalité triangulaire*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ainsi que l'inégalité de la moyenne

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{[a,b]} |g| \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration. On a, par définition de la valeur absolue, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. La propriété de croissance de l'intégrale nous donne alors

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

ce qui donne la première inégalité.

Pour la deuxième, on remarque que

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq |f(x)| \sup_{[a,b]} |g|$$

et on intègre par rapport à x . □

Propriété 5.1.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, alors*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

Démonstration. On considère le polynôme de degré 2 suivant :

$$P(X) = \int_a^b (Xf(x) + g(x))^2 dx = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) X^2 + 2 \left(\int_a^b (x)f(x)g(x) dx \right) X + \int_a^b (x)|g(x)|^2 dx.$$

La première expression de P montre qu'il ne prend que des valeurs positives sur \mathbb{R} , et notamment que son discriminant est positif. D'après la deuxième expression, ce discriminant vaut

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b (x)f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

On a donc montré l'inégalité. □

On peut également définir l'intégrale de fonctions continues par morceaux à valeurs dans \mathbb{R}^n , \mathbb{C} , \mathbb{C}^n , ou même dans un espace vectoriel réel de dimension *finie* quelconque. Il suffit pour cela de travailler

coordonnée par coordonnée : on considère une fonction f à valeurs un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie et on écrit $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$ où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de E . On définit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)dx \right) e_i \in E,$$

on est donc ramené à des intégrales de fonctions à valeurs réelles. Toutes les résultats ci-dessus sont alors vrais, quitte à remplacer la valeur absolue par une norme sur E .

5.2 Lien entre intégrale et primitive

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet une *primitive* F si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .

On a la propriété suivante :

Propriété 5.2.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Soit c un point de $[a, b]$. On pose $F_c(x) = \int_c^x f(y)dy$. On a les résultats suivants :*

1. *la fonction F_c est continue ;*
2. *si f est continue en x , alors F_c est dérivable en x et vérifie $F'_c(x) = f(x)$;*
3. *si f est continue sur $[a, b]$, F_c est de classe \mathcal{C}^1 et est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en c . Notamment, pour tout primitive F de f , on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. 1. Comme f est continue par morceaux, elle est bornée par une constante M . On peut alors écrire

$$|F_c(x) - F_c(y)| = \left| \int_x^y f(x)dx \right| \leq \left| \int_x^y |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_x^y Mdx \right| = M|x - y|.$$

La fonction F_c est donc Lipschitzienne, et par conséquent continue.

2. On va montrer que le taux d'accroissement de F_c en un point x_0 où f est continue tend vers $f(x_0)$. Soit ε un réel positif, et soit η tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt. \end{aligned}$$

Si $|x - x_0| \leq \eta$, pour tout t dans $[x_0, x]$ (note 3) on a $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Cela montre que F_c est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

3. Si f est continue en tout point de $[a, b]$, alors F_c est, d'après le point précédent, dérivable sur $[a, b]$ et $F'_c = f$ est une fonction continue. L'unicité de la primitive a été vue dans le cours sur les fonctions réelles. L'identité $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ se déduit de la propriété de Chasles. \square

Un corollaire important de cette propriété est que toute fonction continue admet une primitive.

On déduit de cette propriété les deux règles de calculs suivantes, très importantes pour le calcul d'intégrales.

Propriété 5.2.2. Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a l'égalité

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Démonstration. La fonction uv est de classe \mathcal{C}^1 , on a donc notamment

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

\square

Propriété 5.2.3. Si φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et si f est continue sur $\varphi([a, b])$ (note 4), alors on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Un moyen mnémotechnique simple pour retrouver cette formule est d'imaginer qu'on a posé $y = \varphi(x)$, de sorte que $dy = \varphi'(x)dx$, que $f(y) = f(\varphi(x))$ et que si x varie de a à b , alors y varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f (une telle fonction existe, puisque f est continue). On a alors, puisque $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

\square

Dans la plupart des cas, les changements de variables utilisés sont bijectifs : φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (note 5) et on peut alors écrire la formule de changement de variables sous la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

(note 3). ou $[x, x_0]$ suivant les cas.

(note 4). Qui est un segment.

(note 5). ou $[\varphi(b), \varphi(a)]$.

5.3 Intégration sur un intervalle quelconque

On peut légitimement se poser la question de définir l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle quelconque plutôt que de se limiter à des segment. Sur un intervalle ouvert (dont une des bornes peut désormais valoir $\pm\infty$) on peut observer différents problèmes qui ne se posaient pas sur un segment. En effet, la définition naturelle de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque I (qui généralise notamment les fonctions continues) est la suivante, pour laquelle une fonction continue par morceaux peut très bien tendre vers $\pm\infty$ à une des bornes.

Définition 5.3.1. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I (non nécessairement fermé) est continue par morceaux si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I .*

Ainsi, on se convaincra sans peine qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle ne peut pas nécessairement être encadrée par des fonctions en escalier intégrables, de sorte que la définition 5.1.2 ne s'y applique pas.

Définition 5.3.2. *On dit qu'une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle I est intégrable si elle vérifie une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\sup_{J \text{ segment} \subset I} \int_J f(x) dx < \infty$;
2. il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissant vers $\inf I$ et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant vers $\sup I$ telles que $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ existe ;
3. pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissant vers $\inf I$ et toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant vers $\sup I$, $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ existe.

On appelle alors intégrale de f le nombre

$$\sup_{J \text{ segment} \subset I} \int_J f(x) dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx.$$

On peut définir de même l'intégrale d'une fonction de signe quelconque, en passant par la valeur absolue de la fonction.

Définition 5.3.3. *Une fonction f de I dans \mathbb{R} est dite intégrable si $|f|$ est intégrable sur I (au sens de la définition précédente). On dit aussi que l'intégrale converge. Dans ce cas, la limite*

$$\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

existe et ne dépend pas des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On définit alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx.$$

On peut ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle à l'étude de l'intégrabilité aux bornes de cet intervalle :

Propriété 5.3.4. *Soit I un intervalle, soient a et b deux réels avec $\inf I < a < b < \sup I$ et f une fonction continue par morceaux sur I . Alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $] \inf I, a]$ et sur $[b, \sup I [$.*

Démonstration. On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers $\inf I$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers $\sup I$. On écrit alors

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx = \int_{a_n}^a |f(x)| dx + \int_a^b |f(x)| dx + \int_b^{b_n} |f(x)| dx.$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche converge si et seulement si f est sommable sur I , et le membre de droite converge si et seulement si f est sommable sur $] \inf I, a]$ et $[b, \sup I[$ (l'intégrale sur $[a, b]$ converge, puisqu'on intègre une fonction continue par morceaux sur un *segment*). Cela montre le résultat. \square

L'inégalité triangulaire est toujours vraie pour les intégrales sur un intervalle quelconque, de même que la linéarité.

Propriété 5.3.5. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I . Alors*

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

Démonstration. Pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$, on écrit $\left| \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx$, puis on fait tendre n vers ∞ . \square

Propriété 5.3.6. *Soit I un intervalle et f et g deux fonctions sommables sur I . Si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est sommable sur I et on a*

$$\int_I \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_I f(x) dx + \mu \int_I g(x) dx.$$

Démonstration. On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On écrit $\int_{a_n}^{b_n} |\lambda f(x) + \mu g(x)| dx \leq \lambda \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx + \mu \int_{a_n}^{b_n} |g(x)| dx$. En faisant tendre n vers ∞ , on voit que $\lambda f + \mu g$ est sommable.

L'égalité des intégrales s'obtient en passant à la limite dans $\int_{a_n}^{b_n} \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx + \mu \int_{a_n}^{b_n} g(x) dx$. \square

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'intégrale d'une fonction au voisinage d'une borne de l'intervalle d'intégration. Le théorème suivant est tout à fait analogue à ce qui a été fait pour les séries.

Théorème 5.3.7. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ (note 6) avec g positive.*

- *Si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$), $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b alors*

$$\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right) \quad (\text{respectivement } \int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right), \int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt),$$

au voisinage de b .

(note 6). le même résultat est bien entendu vrai pour des intervalles de la forme $]a, b]$ si l'on fait les substitutions adéquates

– Si g est intégrable sur $[a, b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$) au voisinage de b alors f est intégrable sur $[a, b[$ et on a

$$\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(t)dt\right) \quad (\text{respectivement } \int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right), \int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt),$$

au voisinage de b .

Ce théorème permet notamment d'étudier l'intégrabilité d'une fonction en se ramenant à des équivalents.

Démonstration. On ne traite que le cas g non-intégrable en b et $f = o(g)$, les autres cas se traitant de manière similaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f = o(g)$ au voisinage de b , il existe un élément x_0 de $[a, b[$ tel que si $x \in [x_0, b[$ alors, $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}g(x)$. On a donc pour $x > x_0$

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \int_{x_0}^x |f(t)|dt \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g(t)dt \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t)dt.$$

Comme g n'est pas intégrable en b , $\int_a^x g(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b , et il existe un x_1 dans $[a, b[$ tel que si $x > x_1$, alors

$$\left|\int_a^{x_0} f(t)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t)dt.$$

Finalement, on a, pour $x \geq \max(x_1, x_2)$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \varepsilon \int_a^x g(t)dt,$$

ce qui montre que $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$. □

Beaucoup de fonctions usuelles ont un comportement équivalent à une puissance de x au voisinage des bornes d'intégration. Il est donc utile de savoir pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, \infty[$.

Propriété 5.3.8. 1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.

2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $[1, \infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha > 0$, il suffit donc d'étudier le comportement asymptotique des suites

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha dx \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha dx.$$

On a pour $\alpha = -1$

$$\int_{1/n}^1 x^{-1} dx = [\ln(x)]_{1/n}^1 = \ln(n) \quad \text{et} \quad \int_1^n x^{-1} dx = [\ln(x)]_1^n = \ln(n).$$

Par conséquent, pour $\alpha = -1$, x^α n'est intégrable ni sur $]0, 1]$ ni sur $[1, \infty[$. Pour $\alpha \neq -1$, on a

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{1/n}^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

On doit donc différencier selon le signe de $\alpha + 1$. On observe alors que $\int_{1/n}^1 x^\alpha dx$ a une limite finie si et seulement si $\alpha > -1$ et que $\int_1^n x^\alpha dx$ a une limite finie si et seulement si $\alpha < -1$. \square

Les autres comportements classiques à la limite d'un intervalle sont les comportements logarithmiques et exponentiels.

Propriété 5.3.9. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \ln^\alpha(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais pas sur $[1, \infty[$. La fonction $e^{\lambda x}$ est intégrable sur $[0, \infty[$ si et seulement si $\lambda < 0$.*

Démonstration. On sait que $\frac{1}{x} = o(\ln^\alpha(x))$ en $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$, donc \ln^α non plus.

On sait également que $\ln^\alpha(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, la fonction \ln^α l'est donc aussi.

Pour la fonction exponentielle, un calcul donne, pour $\lambda \neq 0$ (note 7)

$$\int_0^n e^{\lambda x} dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \right]_0^n = \frac{1 - e^{\lambda n}}{\lambda}.$$

Si $\lambda > 0$ cette suite diverge, si $\lambda < 0$, elle converge vers $\frac{1}{\lambda}$. \square

5.4 Théorèmes de convergence

Le théorème suivant est l'outil principal pour étudier l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 5.4.1 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I . On suppose que*

1. *pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ converge ;*
2. *la fonction $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est continue par morceaux ;*
3. *il existe une fonction positive g intégrable sur I telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pour tout n et tout x de I .

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_n \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Démonstration. Admis (conformément au programme du concours). \square

(note 7). Le cas $\lambda = 0$ étant trivial : on a $e^{0x} = 1$, qui n'est pas intégrable sur $[0, \infty[$.

5.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions définies comme l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables. Une question naturelle est alors de trouver des critères pour assurer que ces fonctions sont continues, dérivables, etc.

On va noter (t, x) les différentes variables de la fonction à intégrer, t désignant la variable d'intégration, qui vivra donc dans un intervalle de \mathbb{R} , et x désignant la variable par rapport à laquelle on souhaite obtenir de la régularité (c'est-à-dire de la continuité, de la dérivabilité, etc.). Cette variable vivra dans une partie de \mathbb{R}^d (par exemple).

Dans les théorèmes à suivre, on va donc faire des hypothèses d'intégrabilité sur la fonction $t \mapsto f(t, x)$, et des hypothèses de régularité sur la fonction $x \mapsto f(t, x)$.

On commence par énoncer un théorème permettant de prouver la *continuité* d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 5.5.1 (Théorème de continuité sous l'intégrale). *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, où I est un intervalle de \mathbb{R} et Ω une partie de \mathbb{R}^d . On suppose que*

1. *pour tout t de I la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur Ω ;*
2. *pour tout x de Ω , la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;*
3. *il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tout (t, x) de $I \times \Omega$.*

Alors la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable pour tout x et la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t, x) dt$$

est continue sur Ω .

Démonstration. Comme, pour tout x , la fonction $t \mapsto |f(t, x)|$ est majorée par la fonction intégrable g , la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable et la définition de F a bien un sens.

Soit x un point de Ω et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω tendant vers x . On va montrer que $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $F(x)$, ce qui suffira à montrer que la fonction F est continue. On a $F(x_n) = \int_I f(t, x_n) dt$. Posons $\varphi_n(t) = f(t, x_n)$. D'après les hypothèses du théorème, la fonction φ_n est continue par morceaux, $(\varphi_n(t))$ converge vers $\varphi(t)$ pour tout t , $\varphi(t)$ est continue par morceaux et on a l'inégalité

$$|\varphi_n(t)| \leq g(t)$$

pour tout t .

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on trouve

$$\lim_n F(x_n) = \lim_n \int_I \varphi_n(t) dt = \int_I \varphi(t) dt = F(x).$$

□

Passons maintenant à un théorème de *dérivabilité*.

Théorème 5.5.2 (Théorème de dérivabilité sous l'intégrale). *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, où I et Ω sont des intervalles de \mathbb{R} . On suppose que*

1. pour tout t de I , la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω ;
2. pour tout x de Ω , la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
3. pour tout x de Ω , la fonction $t \mapsto \partial_x f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;
4. il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|\partial_x f(t, x)| \leq g(t)$ pour tout (t, x) de $I \times \Omega$.

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t, x) dx$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_I \partial_x f(t, x) dt.$$

Remarquer que les hypothèses 1, 2 et 3 sont seulement des hypothèses servant à donner un sens aux intégrales $\int_I f(t, x) dx$ et $\int_I \partial_x f(t, x) dx$.

Noter que pour ce théorème, on n'a pas besoin d'hypothèse de domination sur la fonction f elle-même, mais seulement sur sa dérivée partielle en x .

Démonstration. Tout d'abord, F est bien définie car $t \mapsto f(t, x)$ est supposée intégrable sur I .

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout x dans Ω et toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x + h_n$ soit dans Ω , on a

$$\lim_n \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(x, t) dt.$$

On aura en effet montré que la fonction F est dérivable et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \int_I \partial_x f(t, x) dt$ qui est continue, au vu du théorème précédent.

On a

$$\frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \left(\int_I f(t, x + h_n) dt - \int_I f(t, x) dt \right) = \int_I \frac{f(t, x + h_n) - f(t, x)}{h_n} dt.$$

Posons donc $\psi_n(t) = \frac{f(t, x + h_n) - f(t, x)}{h_n}$. La fonction ψ_n est continue par morceaux, converge simplement vers la fonction continue par morceaux $t \mapsto \partial_x f(t, x)$ et le théorème des accroissements finis montre que

$$|\psi_n(t)| = \left| \frac{f(t, x + h_n) - f(t, x)}{h_n} \right| \leq \frac{1}{h_n} |h_n| \sup_{\lambda \in [0, 1]} |\partial_x f(t, x + \lambda h_n)| \leq g(t).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on en déduit

$$\lim_n \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(t, x) dt,$$

ce qui achève la démonstration. □