Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
2012-2012

Exercices : Espaces de Sobolev, équation de la chaleur sur $\mathbb{T}$

Exercice 1.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{si } x \in [0,\pi] \\ \frac{-\pi-x}{2} & \text{si } x \in]-\pi,0[. \end{cases}$$

2. En déduire les valeurs de s telle que f soit dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$.

3. Quelle est la série de Fourier dérivée de f ? Comment agit-elle par dualité sur les fonctions de $\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$ (c'est-à-dire, combien vaut $\int_{\mathbb{T}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ pour $\phi \in \mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$) ?

Exercice 2.
On considère l'équation de la chaleur avec second membre suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) & = \delta(x) \\ u_0(x) & = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

où le second membre δ est donné par $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$. Montrer que $\delta \in \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T})$. Donner les coefficients de Fourier de la solution u de (1).
Écrire l'estimation a priori associée à cette équation.

Exercice 3.
Soit f une fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, g une fonction de $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T})$, et soit u la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale f et de second membre g :

$$\begin{cases} \partial_t u - \sigma\Delta u & = g(x) \\ u_0(x) & = f(x). \end{cases}$$

Quelle est la limite quand t tend vers ∞ de $u(t,x)$? En quel sens a lieu cette convergence ? Montrer que la vitesse de convergence est exponentielle. Comment la vitesse dépend-elle de σ ?